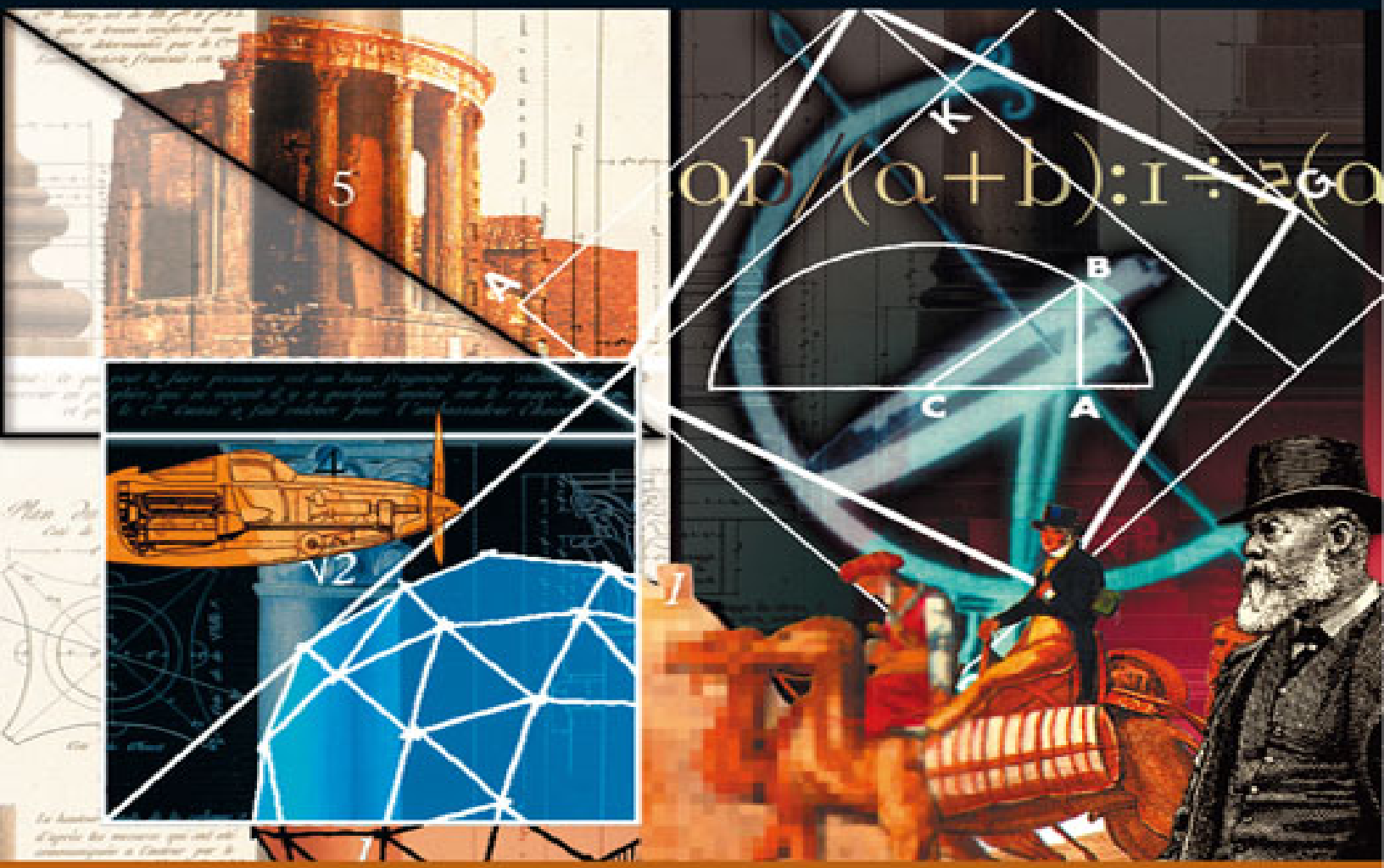
CIÊNCIA E CULTURA



20.000 Léguas Matemáticas

Um passeio pelo misterioso mundo dos números

A.K. Dewdney

ZAHAR

A.K. Dewdney

20.000 LÉGUAS MATEMÁTICAS

Um passeio pelo misterioso mundo dos números

Tradução:
VERA RIBEIRO

Revisão:
VÍTOR TINOCO
Matemática, UFRJ

ZAHAR

CIÊNCIA E CULTURA

Consultor:

Henrique Lins de Barros
Pesquisador titular do Museu de Astronomia
e Ciências Afins, MAST/MCT
Doutor em física

UMA BIOGRAFIA DO UNIVERSO
Fred Adams e Greg Laughlin

MATEMÁTICA LÚDICA
Leon Battista Alberti

A CAIXA PRETA DE DARWIN
Michael Behe

CONVITE À FÍSICA
Yoav Ben-Dov

GIGANTES DA FÍSICA
Richard Brennan

20.000 LÉGUAS MATEMÁTICAS
A.K. Dewdney

FORMIGAS EM AÇÃO
Deborah Gordon

A REVOLUÇÃO CIENTÍFICA
John Henry

O ESPETÁCULO DA EVOLUÇÃO
Bertrand Jordan

AS ORIGENS DE NOSSO UNIVERSO
Malcolm S. Longair

UMA BREVE HISTÓRIA DO INFINITO
Richard Morris

O QUE SABEMOS SOBRE O UNIVERSO
Richard Morris

OS GRANDES EXPERIMENTOS CIENTÍFICOS
Michel Rival

O ESPECTRO DE DARWIN
Michael R. Rose

A UNIFICAÇÃO DAS FORÇAS FUNDAMENTAIS
Abdus Salam et al.

SERÁ QUE DEUS JOGA DADOS?
Ian Stewart

DE ARQUIMEDES A EINSTEIN
Pierre Thuillier

O TEMPO NA HISTÓRIA
G.J. Whitrow

UMA HISTÓRIA SENTIMENTAL DAS CIÊNCIAS
Nicolas Witkowski

À BEIRA D'ÁGUA
Carl Zimmer

SUMÁRIO

Prefácio

Ponto de partida
O matemático pondera a questão

PARTE I
O HOLOS

1. A morte de um sonho
Petros Pygonopolis explica o sonho pitagórico do cosmo comensurável e conta como ele fracassou

2. O nascimento de um teorema
Pitágoras perde o mundo mas ganha o Olimpo, ao descobrir seu famoso teorema

PARTE II
O MUNDO SUPERIOR

3. Al Jabr
O astrônomo al-Flayli descreve a Casa da Sabedoria, o nascimento dos números modernos e a álgebra

4. As esferas
Uma incursão pelo deserto revela um antigo erro sobre as estrelas e a história de sua correção

PARTE III
UM NÚMERO DE DESAPARECIMENTO

5. A mensagem
A física e historiadora Maria Canzoni explica como se decodificou uma mensagem vinda das estrelas

6. A realidade última
Se a matéria é realmente energia, talvez a energia seja realmente informação

PARTE IV
AS MÁQUINAS DE PENSAR

7. Horpando os zuques
Sir John Brainard explica o processo de abstração e como ele levou à mecanização do pensamento

8. Máquinas mentais
A máquina de Turing dá origem a uma nova versão da mente e a um universo com existência independente

Epílogo: O cosmo e holos

Pós-escrito

Índice remissivo

PREFÁCIO

Pitágoras, o matemático e filósofo grego que floresceu no século V a.C., sempre figurou entre os maiores matemáticos do mundo, às vezes o maior. Dois de seus feitos mais importantes a descoberta das magnitudes incomensuráveis e o teorema de Pitágoras desempenharam papéis vitais nos alicerces da matemática.

Apesar de suas descobertas fundamentais na matemática, Pitágoras tinha uma outra faceta, apenas parcialmente explicada pela cultura de sua época e lugar. Em particular, a respeito do cosmo e da relação deste com a matemática, ele tinha uma crença que se afigura totalmente estranha. Hoje em dia, muitos cientistas acham que a matemática tem uma relação marcante com a realidade. Alguns chegam até a crer que, de algum modo, a matemática rege e controla a realidade. Mas, quem poderia acreditar que a matemática *faz* a realidade? Pitágoras acreditava.

Pitágoras não era exatamente um profeta da ciência. Nem todas as suas ponderações na filosofia natural (hoje chamada de "ciência natural") sobreviveram a um exame objetivo. Por exemplo, ele também acreditava que o Sol girava em torno da Terra e que, "embaixo" da Terra (que ele entendia ser redonda), havia uma grande "fogueira central". Era a esse lugar que voltava o deus Apolo, depois do pôr do sol, para recarregar sua charrete e seus cavalos de fogo, antes de despontar de novo no alvorecer. Não podemos excluir a possibilidade de que Pitágoras entendesse Apolo como uma metáfora, mas, como poderia ele saber que não era um fogo comum que ardia no Sol, e sim uma fogueira atômica? Quanto à ideia de o Sol girar em torno da Terra, todos acreditavam nisso em sua época!

Muitas vezes me perguntei como Pitágoras entenderia a ciência e a matemática modernas. Dificilmente ele deixaria de se alegrar com o papel central desempenhado pelo teorema pitagórico em quase todos os ramos da

matemática e, por conseguinte, da ciência. No entanto, acaso não perguntaria, delicadamente: “Logo…?” Não indagaria sobre nosso progresso na questão que foi central em sua vida científica “Vocês já demonstraram que a trama do cosmo é tecida de matemática?”

Como um tributo ao fundador da matemática moderna, decidi retomar essa questão em nome de Pitágoras, passados uns 2.500 anos desde sua morte. Minha abordagem só pode ser chamada de “inusitada”, uma vez que constitui a narrativa ficcional de uma viagem aos quatro cantos do mundo. A odisseia matemática aqui apresentada explora duas questões fundamentais sobre a matemática e sua relação com a realidade: por que a matemática tem um sucesso tão espantoso na descrição da estrutura da realidade física? A matemática é criada ou descoberta? Essas perguntas circundam a fogueira central de minha busca pitagórica. As respostas fornecidas pelos quatro personagens esclarecem o assunto por quatro ângulos diferentes. Levam a algumas conclusões provisórias, mas surpreendentes, que entram em confronto direto com a tendência moderna, mesmo entre alguns cientistas, a varrer as indagações referentes à realidade para baixo de um tapete pós-moderno.

Pitágoras foi místico, além de matemático. Emprego a palavra *místico* no sentido técnico tradicional, e não em seu moderno sentido pejorativo. Dito de outra maneira, Pitágoras acreditava que algumas verdades podiam ser alcançadas através da contemplação direta, após uma preparação adequada (e muito rigorosa) do corpo e da mente. Ele fundou uma tradição mística, chamada irmandade pitagórica. Não apenas essa confraria sobreviveu por cerca de mil anos, penetrando a fundo na era islâmica, como encontramos pitagóricos espocando aqui e ali em nossa narrativa, pelo século XIX adentro. Os pitagóricos mais contemporâneos não foram místicos, ao que eu saiba, mas apenas cientistas de destaque que se descreviam como “pitagóricos”. Eles acreditavam, para dizer o mínimo, que a realidade física tem uma base matemática.

Não é preciso sermos místicos para acreditar nisso. Todo o propósito desta aventura é introduzir um sopro de vida nova em velhas questões. É bem possível que a próxima grande mudança do paradigma científico venha a implicá-las diretamente. Só então os pitagóricos poderão descansar em paz.

PONTO DE PARTIDA

Paris, 20 de junho de 1995

Estou sentado na sala de embarque do voo 372 da Air France, com destino a Atenas. Cheguei há apenas uma hora, num voo transatlântico. Afora o cansaço geral, estou em esplêndida forma.

Da janela da sala de embarque posso ver nosso próximo avião. Com toda a reluzente beleza exigida pelos voos supersônicos, ele é um símbolo da tecnologia do final do século XX. Essa tecnologia, relembro a mim mesmo, depende quase inteiramente da ciência, e a ciência — em especial a ciência física — depende quase inteiramente da matemática. É como se eu fosse voar para Atenas pelo simples poder da matemática. As pás das turbinas girarão em círculos, a força de retropulsão da descarga a jato produzirá um impulso igual e contrário para frente, os componentes da estrutura metálica resistirão à tensão proporcionalmente a seus cortes transversos, e o fino ar da estratosfera deslizará sobre asas matematicamente otimizadas para promover a elevação, igualando exatamente a gravidade.

Em parte, lembro a mim mesmo, é disso que se trata nesta viagem: do poder da matemática, de sua espantosa aplicabilidade na ciência e na tecnologia. O voo vindouro é apenas o primeiro passo numa longa viagem. Tenho compromissos marcados na Turquia, na Jordânia, na Itália e na Inglaterra, para me encontrar com diversos pensadores, alguns eminentes, alguns desconhecidos. Espero que eles lancem um pouco de luz sobre a questão que estou examinando: qual é a verdadeira natureza da matemática?

Trata-se de uma questão desoladoramente vaga, é claro, mas pensei em duas perguntas mais explicitamente focalizadas, as quais, se respondidas, muito contribuirão para resolver a primeira:

1. Por que a matemática é tão incrivelmente útil nas ciências naturais?
2. A matemática é descoberta ou é criada?

Não consigo escapar à sensação de que essas duas perguntas estão relacionadas, talvez muito de perto. O modo exato como se relacionam, entretanto, não sei dizer. Responder a essas duas perguntas e, com um

pouco de sorte, compreender de que modo elas se relacionam constituem o objetivo de minha busca.

Não há dúvida de que a maioria dos cientistas, particularmente os cientistas físicos, consideram a matemática não apenas útil, mas também indispensável. Ela nos permite situar a posição dos planetas com anos de antecedência, prever os orbitais dos elétrons, ou descrever o fluxo de ar sobre a asa do avião em que estou prestes a embarcar. As equações e as fórmulas da física e de outras ciências indutivas, assim como os axiomas e teoremas em que elas se baseiam, frequentemente descrevem realidades físicas com uma precisão e universalidade impressionantes. Levam, inúmeras vezes, a previsões exatas de novos fenômenos, quer se trate de partículas ou de novos planetas — e, com grande frequência, resultam em máquinas espantosas, que funcionam perfeitamente. Esse poder clama por uma explicação.

A menos que a espantosa capacidade de a matemática descrever a realidade física seja pura coincidência, ou constitua um modo de nos enganarmos maciçamente, a primeira pergunta que fiz quase que se reformula por si só. *Por que* o universo físico é determinado (ou descritível com exatidão) em tamanho grau pelas *ideias* matemáticas? Acho estranho que as pessoas raramente façam essa pergunta, mas a mim ela atrai como uma estrela guia.

Quanto à segunda pergunta — se a matemática é descoberta ou criada —, devo confessar uma experiência quase mística que me ocorre quando trabalho num problema matemático, uma experiência que parece impor-se de fora para dentro. Tenho, muitas vezes, a estranha sensação de que a resposta *está lá*, de algum modo, e de que existe independentemente de eu pensar nela ou não. Quando surge uma solução (se é que surge), tenho a avassaladora impressão de havê-la descoberto, e não criado. Todos nós temos direito a nossas impressões pessoais, mas, como posso defender objetivamente essa visão? Eu poderia assinalar que, quando ocorre uma resposta (se é que ela ocorre) a uma outra pessoa que esteja trabalhando no mesmo problema que solucionei, quase sempre se trata da mesma solução. Essa pessoa pode expressá-la de maneira diferente, mas as duas soluções são mutuamente transformáveis, equivalentes, ou, em síntese, idênticas. A solução está lá, em algum lugar, esperando.

Em seu nível mais fundamental, a matemática diz respeito à verdade. Como é possível criar a verdade? Grande parte da matemática tem também

uma beleza extraordinária, mas essa não parece ser uma característica fundamental. Na matemática, a beleza não é sinônima da verdade, embora certas verdades sejam belas e algumas coisas belas sejam verdadeiras. Um matemático pode compor um teorema tão belo quanto uma obra de arte, mas depois descobrir que ele não é verdadeiro, o que o condena em caráter absoluto como matemática.

Além disso, embora alguns teoremas tenham uma beleza extraordinária, outros são muito feios. Não se pode afirmar que os matemáticos escolham, em nenhum sentido, o que será e o que não será verdadeiro. O ato criativo do matemático, se é que existe, consiste em imaginar o que pode ser verdadeiro, conjecturar a forma de um teorema a ser descoberto, e depois envidar todos os esforços para descobri-lo, exatamente como um explorador. Não há garantia, no entanto, de que essa busca seja bem-sucedida. Ela depende de algo que ultrapassa os esforços do matemático, de algo totalmente diferente. Depende daquilo que é verdadeiro.

Se admitirmos momentaneamente que a matemática não é criada, mas descoberta, teremos que perguntar: *por quê?* A matemática tem existência independente? Essas são perguntas antigas, remoídas pelos matemáticos ao longo de todas as eras, mas basicamente não resolvidas e já agora quase esquecidas. Quem, além dos poucos estudiosos com quem marquei encontros, trabalha nisso hoje em dia?

Dizem que os matemáticos entregam-se a sua filosofia eletiva nos feriados, mas, durante o resto do tempo, são platônicos. Para Platão, a matemática apontava para um mundo de formas ou arquétipos puros e indestrutíveis, que gozariam de uma espécie de super-realidade. Na *República*, ele nos convida a entrar numa caverna onde fez uma fogueira. Sentamo-nos de costas para o fogo, de frente para uma parede, como a plateia de um cinema. Atrás de nós, Platão superpõe estátuas e outras formas entre a fogueira e a parede, produzindo formas reconhecíveis na sombra. Enquanto vemos as sombras moverem-se na parede, ouvimos uma paráfrase de Platão na trilha sonora: “Quando você percorre o mundo, vendo árvores e pedras e pássaros, está, na verdade, apenas sentado em minha caverna, vendo tão somente as sombras de realidades superiores na parede da sua percepção.” Toda árvore, toda pedra, todo pássaro é meramente a projeção de uma árvore, uma pedra ou um pássaro arquetípicos, cuja forma é delineada por uma espécie de luz olímpica.

Os matemáticos, mesmo os que se descrevem como platônicos, não chegam a ir tão longe. Seus únicos arquétipos propriamente ditos são de natureza matemática. Qualquer círculo que se possa desenhar é apenas a manifestação de um círculo ideal perfeito. Não tem espessura e, por conseguinte, é invisível. Não tem localização particular e, portanto, é impossível de localizar. Se traçarmos círculos cada vez mais precisos e refinados, com raios maiores e linhas mais finas, chegaremos mais perto do círculo ideal, mas nunca o realizaremos propriamente. Na verdade, não pensamos em nosso círculo desenhado, mas no arquétipo ideal.

Temos muitos conhecimentos sobre esse círculo ideal. Sabemos, por exemplo, que a razão entre sua circunferência e seu diâmetro é o número irracional transcendente pi, que tem um número infinito de algarismos:

pi = 3,14159265358979…

Ao medirmos os círculos que desenhamos, ao medirmos suas circunferências e seus diâmetros, calculando a razão enquanto avançamos, chegamos cada vez mais perto do valor real de pi: 3,14, depois 3,142, depois 3,1416, e assim por diante.

Todos os conceitos matemáticos têm essa propriedade fundamental em comum. Não apenas todo círculo, mas também toda linha, todo número escrito, toda expressão simbólica aponta para um conceito ideal, uma abstração que só pode ser apreendida através desses desenhos e símbolos. A maioria dos matemáticos não presume que a matemática seja a própria fonte da realidade. Não obstante, muitos deles têm a mesma impressão que eu: a de que a matemática tem uma espécie de vida independente, que quase equivale a um lugar passível de ser explorado.

Digam o que disserem sobre a existência independente do mundo de Platão, uma coisa é certa: as verdades da matemática não obedecem a nossos desejos ou nossos medos. Exceto nos fins de semana, os matemáticos têm que aceitar o que o Olimpo revela — ou esconde.

A questão por trás das duas perguntas que formulei sempre me dá calafrios na espinha: é possível que a existência independente da matemática tenha algo a ver com sua capacidade de descrever com tamanha exatidão o mundo físico? Pense bem: num nível puramente mental, toda a matemática está diante de nós — uma parte conhecida, muita coisa ainda por descobrir. Suas verdades são adamantinas, incontestáveis. Num outro

nível, vivemos num cosmo que parece obedecer a leis matemáticas. Mas, em nome dos céus, por que tem que ser assim?

Tenho grande esperança de que alguns dos estudiosos com quem combinei encontrar-me forneçam respostas a essas perguntas, ou, pelo menos, indícios. Em minha busca, terei que mover céus e terras, sem deixar escapar nenhuma explicação possível para o que parece ser a existência independente da matemática, ou sua ubiquidade no cosmo. Devo, inclusive, estar preparado para a possibilidade de que, afinal, a matemática seja uma criação, e de que eu tenha apenas me iludido durante todo esse tempo. Qualquer discernimento que me leve a essa conclusão deverá, certamente, provir da cultura ou da história. Por exemplo, posso descobrir que a matemática grega foi tão influenciada pela antiga cultura grega, que isso tornaria impossível ou sumamente improvável que tais ideias fossem produzidas por qualquer outra cultura. Nesse caso, a existência independente da matemática será uma ilusão, fomentada por uma submissão voluntária a estilos de pensamento culturalmente determinados de uma era para outra. Sua vasta aplicabilidade será um engano maciço, decorrente de uma visão de mundo moldada pelos mesmos estilos de pensamento. Essa é uma possibilidade que tenho que enfrentar, por maior que seja a minha relutância.

Portanto, estou decidido a fazer minhas perguntas a cada um dos estudiosos que vou visitar. Meu primeiro encontro ocorrerá dentro de dois dias, num sítio arqueológico na costa da Ásia Menor, na moderna Turquia. Petros Pygonopolis é historiador da matemática e da ciência na Universidade de Atenas e um grande expoente em antiga matemática grega. Quer encontrar-se comigo em Mileto, o antigo entreposto comercial onde Pitágoras, o mais eminente filósofo e matemático da era grega antiga, passou grande parte de sua vida. Nesse ambiente, espero, Pygonopolis poderá esclarecer um pouco a matemática e a ciência gregas como um todo. De que maneira se poderia estudar melhor a influência da cultura na matemática do que num mundo tão vastamente diferente do nosso, tão distante no tempo e no espaço?

A parada seguinte em meu itinerário será o Egito — melhor dizendo, o deserto meridional da Jordânia —, onde me encontrarei com Jusuf al-Flayli, astrônomo da Universidade do Cairo. Faz anos que ele pesquisa a antiga astronomia árabe, mais ou menos como uma atividade secundária, convém admitir. A julgar por meu correio eletrônico e outras formas de

correspondência com ele, al-Flayli parece ter um interesse especial na relação entre a matemática e a astronomia praticadas não apenas pelos astrônomos árabes do período islâmico, mas também pelos cientistas babilônios, hindus e ptolemaicos (período grego tardio) anteriores. Ele prometeu levar-me a uma miniexpedição pelo deserto, onde tenciona reconstituir o que chama de antiga percepção do universo. Também se ofereceu para me explicar as mudanças de paradigma ocorridas desde aqueles tempos primitivos, inclusive a revolução copernicana. Também nesse caso, espero que al-Flayli me ajude a separar os fios da cultura de qualquer realidade factual que tenha estado subjacente à astronomia primitiva ou à matemática que a possibilitou.

Uma outra viagem me levará a Veneza, onde tenho um encontro marcado com Maria Canzoni, antiga pesquisadora da área de física do gigantesco Laboratório CERN, em Genebra. No momento, ela leciona história da ciência na Università Ca'Foscari di Venezia. Canzoni chamou-me a atenção, na Internet, como defensora do que prefere chamar de platonismo moderno. Diz ela que o platonismo (na forma restrita que já descrevi) é não apenas possível no mundo moderno, mas também necessário para uma compreensão plena, em termos filosóficos, da relação entre a física e o cosmo que esta afirma descrever. A matemática é a chave dessa relação. Canzoni não parece ter dúvidas quanto a sua realidade preexistente.

Por fim, viajarei à Inglaterra, onde marquei um encontro com um ícone da matemática do século XX, *Sir* John Brainard, da Universidade de Oxford. Tive uma sorte extraordinária na marcação desse encontro, não apenas pela proeminência de Brainard, mas também por sua idade avançada. Dentre todos os meus contatos vindouros, essa é a pessoa sobre quem tenho menos conhecimento. Apesar de sua especialização em teoria da computação (entre outras coisas), Brainard recusa-se a utilizar o correio eletrônico. Tenho em mãos apenas uma carta bastante enigmática que ele me enviou, prometendo dar-me esclarecimentos sobre a questão da matemática e sua relação com a realidade. Ele soa muito irritadiço, e aguardo nosso encontro com sentimentos meio confusos. Não obstante, é com Brainard que tenho maior esperança de esclarecer minhas dúvidas. Dizem que ele é o último matemático vivo com uma apreensão da totalidade da matemática, se é que isso é possível.

MESDAMES ET MESSIEURS, NOUS ALLONS
DANS QUELQUES INSTANTS COMMENCER

L’EMBARQUEMENT DU VOL AIR FRANCE 378
À DESTINATION D’ATHÈNE…[a]

Nas asas da matemática, voarei primeiro para o Oriente, e depois voltarei para o Ocidente — mas, como poderei voar, se descobrir que não existe uma boa razão para que o avião se mantenha no ar?

---

a “Senhoras e senhores, dentro de instantes iniciaremos o embarque do voo 378 da Air France, com destino a Atenas…” (N.T.)

PARTE I

O HOLOS

CAPÍTULO 1

A MORTE DE UM SONHO

Izmir, Turquia, 22 de junho de 1995

Que dia estranho! Passei-o em Mileto, ou no que costumava ser Mileto no ano 500 a.C. Se houve um lugar em que a matemática tornou-se uma ciência, foi ali. Mileto foi um centro ímpar do comércio, da filosofia e das artes. Ali viveram Tales, o primeiro cientista, Anaximandro, o filósofo, e Timóteo, o poeta. Ela foi também visitada pelo grande Pitágoras, que saíra de sua nativa Samos para ali aprender e ensinar.

Primeiro, entretanto, permitam-me fazer uma retrospectiva. Cheguei ontem a Atenas e troquei de avião, para fazer uma travessia de uma hora sobre o Egeu, o que me levou a Izmir, na Turquia, a uma hora de carro da parte norte de Mileto. Hoje de manhã, em Izmir, aluguei um Fiat Uno e segui para o sul, passando por uma sucessão de belos vales, numa temperatura sobrenaturalmente quente. Por fim, cheguei ao litoral do Egeu e prossegui ao longo dele, em meio a uma umidade implacável, até chegar a Mileto, uma coleção de ruínas com inúmeras placas para turistas e um estacionamento repleto de ervas daninhas. O local da antiga cidade foi praticamente destruído pelo assoreamento e pela erosão provocada pelo Meandro, o protótipo de todos os rios de curvas e volteios sinuosos. Estacionei do lado de fora de uma área cercada e, passando por restaurações parciais da antiga cidade, caminhei até o templo de Apolo. Ali, alguns turistas recolhiam suas sacolas e máquinas fotográficas, voltando sozinhos ou em grupos para seguir viagem num ônibus que os esperava.

Ao visitarmos lugares antigos, há momentos em que indícios de uma velha presença tomam conta de nós, como fantasmas, em plena luz do dia. Não se pode estar num grupo de turistas para ter essa sensação; é preciso estar sozinho. Ela se apoderou de mim quando me postei diante do templo

de Apolo de Delfos, com suas escadarias e pilastras assombradas por lembranças que não me pertenciam. Olhei em volta, à procura de Petros Pygonopolis, o homem a quem deveria encontrar, mas não vi ninguém por perto.

Ao subir os degraus que levavam ao piso do templo, vi um homem ajoelhado, como que em oração, curvando-se sobre as pedras quadradas e perfeitamente encaixadas do piso. Aproximando-me em silêncio, pude ver que ele estava medindo as pedras com uma régua de bronze. Era um homem corpulento, com uma cabeleira negra que ia ficando grisalha nas têmporas e a tez morena. Parecia estranhamente deslocado, pois vestia um elegante terno branco. Quando limpei a garganta, ergueu os olhos, assustado. Fitou-me com uma expressão confusa, por baixo das sobrancelhas espessas, e em seguida apanhou um par de óculos e os colocou. Subitamente, seu rosto franziu-se num sorriso generoso. Quem mais poderia ser, senão Pygonopolis? Ele se levantou, sacudindo a poeira dos joelhos das calças, e se curvou para me cumprimentar.

— Você deve ser o Dewdney! Desculpe-me por não tê-lo visto. Graças aos céus esses turistas finalmente foram embora! Isto não é roupa para se usar no trabalho de campo, não é? É claro que não — disse, respondendo a sua própria pergunta. — Sou Petros Pygonopolis, historiador da ciência e especialista em matemática grega, quer dizer, em matemática grega antiga.

Trocamos um aperto de mão e demos um passo atrás para examinar um ao outro.

— Bem-vindo a Mileto, e bem-vindo a suas raízes intelectuais — continuou Pygonopolis. — Em suas cartas você fez as perguntas certas, na minha humilde opinião. A matemática é descoberta ou é inventada? Tem existência independente? Como é reconfortante que as pessoas ainda consigam fazer essas perguntas! As respostas, se é que existem, começam pelo que eu estava acabando de fazer, medindo estas pedras com esta régua — acrescentou, exibindo a tira de bronze. — Esta é a *pechya*, ou côvado, que os gregos usavam antigamente.

Apesar de muito bem apessoado e simpático, Pygonopolis tinha um ar nervoso e agitado, como se alguma coisa crucial dependesse de nosso encontro. Seria porque poucas pessoas tinham muito interesse em seu trabalho?

— É uma régua estranha — disse eu. — Não tem graduação nenhuma.

— Ela não é graduada — explicou Pygonopolis — porque não estou medindo as pedras da maneira habitual. Não estou interessado nas dimensões das pedras nem do prédio em si. Estou curioso, simplesmente, em saber com que unidade os construtores trabalharam. Se as medidas forem exatas, mesmo com esta régua *pechya*, os construtores deverão tê-la usado. Caso contrário, tentarei uma outra unidade.

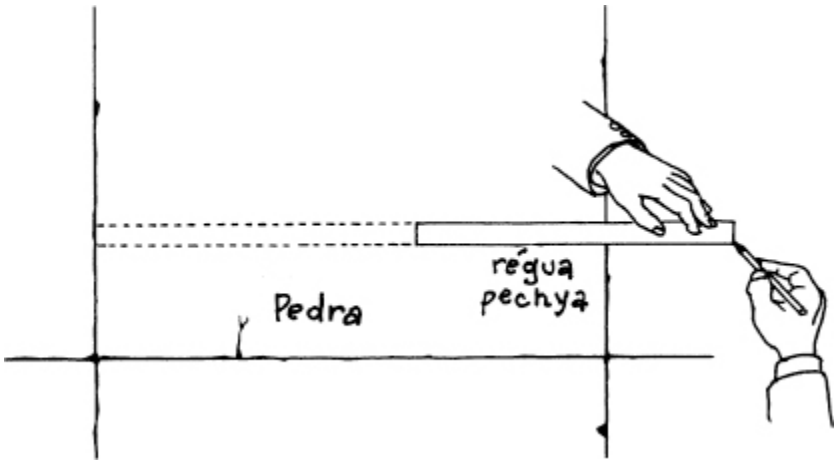
Pygonopolis deu uma espiada num sortimento de réguas de bronze que estavam encostadas numa pilastra restaurada. Os antigos gregos, explicou, tinham nada menos que 20 unidades de medida diferentes.

— No entanto, mesmo ao satisfazer minha curiosidade, estou seguindo os passos do próprio grande Pitágoras — acrescentou. E, deixando no ar esse comentário misterioso, brandiu a régua que estava segurando. — Vamos ver se o templo foi baseado na *pechya*. Se isso não funcionar, em seguida experimentarei o *pygon*. Vou começar de novo, para que você veja o que estou fazendo.

Andou até o fundo do templo e tornou a se ajoelhar no chão, de régua e lápis na mão. Colocou a régua sobre uma das grandes pedras quadradas do pavimento, alinhando sua extremidade com um dos lados. A régua estendia-se por pouco mais de metade da largura da pedra. Pygonopolis fez na pedra uma pequena marca a lápis, na altura da ponta anterior da régua, e depois, fazendo-a deslizar com habilidade sobre seu próprio comprimento, levou a outra ponta a coincidir exatamente com o risco feito a lápis.

Dessa vez, a extremidade anterior da régua foi muito além da fenda entre as pedras. Arrisquei-me a dizer, em voz alta, que talvez a *pechya* não fosse a medida adequada para esse templo. Pygonopolis apenas resmungou alguma coisa sobre esperar para ver. Fez uma nova marca, tornou a deslizar a régua e pareceu não se perturbar quando a outra ponta não chegou nem perto da fenda seguinte. Continuou a fazer a régua avançar pela fileira de pedras até a frente do templo, conversando enquanto prosseguia.

— Mais cedo ou mais tarde, se esta for a unidade certa, a frente da régua coincidirá de novo com uma das fendas. É claro que a *pechya* pode não ser a unidade certa… Ora, ora, vejam só!



O processo de mensuração

Junto do portal, a extremidade dianteira da régua havia tornado a coincidir exatamente com uma das fendas. Animado, Pygonopolis tirou um caderninho de notas do bolso do paletó e fez uma anotação.

— Foi sorte — comentou. — Não havia nenhuma garantia de que a primeira régua que experimentei viesse a funcionar. Vejamos: no processo de mensuração, à espera de que a régua e as pedras tornassem a coincidir, cruzei cinco pedras. Ao mesmo tempo, medi 8 *pechyas*. A partir desses fatos, podemos deduzir o tamanho exato das pedras em *pechyas*, não é?

Olhou para mim com ar de expectativa. Mais tarde, eu viria a perceber que, sempre que terminava uma pergunta dessa maneira, ele esperava que eu a respondesse. Tratei de pensar depressa. Se 5 pedras equivaliam, ao todo, a 8 pechyas de comprimento, 1 pedra deveria ter 1/5 dessa distância, ou 8/5 de *pechya*. Soltei a resposta: — Oito quintos de *pechya*, ou, se você preferir, 1 *pechya* e 3/5.

— Sim e não. É melhor eu dizer uma coisa sobre a aritmética antiga. Os gregos clássicos não tinham um sistema numérico sofisticado como o nosso. Sua maneira de escrever os números simbolicamente era mais ou menos equivalente aos numerais romanos, e praticamente não se prestava a nenhum tipo de cálculo. Além disso, eles não tinham como expressar frações como 8/5.

— O importante a assinalar aqui — prosseguiu — é que o processo de mensuração coincidiu. Com a régua, eu estava medindo uma distância cada vez maior em *pechyas*. Enquanto isso, atravessava uma distância cada vez maior em pedras. Aí, de repente, as duas distâncias coincidiram. Sempre que isso acontece, tem-se uma medida comum, um certo comprimento em

que as duas medidas são totalidades, ou o que algumas pessoas chamam de números inteiros. Os números inteiros, nesse caso, são 8 e 5. A medida comum é 1/5 de *pechya*. A *pechya* compõe-se de 5 dessas unidades, enquanto cada pedra compõe-se de 8 delas.

— Então, os construtores deste templo trabalharam com quintos de *pechya*? — indaguei.

— É perfeitamente possível — afirmou Pygonopolis —, mas o que realmente me interessa não é a unidade com que os construtores trabalharam, e sim uma coisa muito mais profunda. No final das contas, o importante não é a *pechya*, mas uma outra medida, uma unidade especial em que todas as medições resultariam em inteiros.

— Não estou entendendo! — interpus. Eu estava ficando meio confuso.

Súbito, Pygonopolis inclinou-se para a frente, com um ar de conspiração. — É perfeitamente possível — continuou, abaixando a voz enquanto olhava a seu redor — que o próprio Pitágoras, quando moço, tenha estado neste mesmo templo e medido estas pedras. Um dia, ele fez o que acabei de fazer. E também não estava determinando a medida do templo, mas uma coisa muito mais profunda.

Nisso, o irrefreável Pygonopolis conduziu-me às pressas para a frente do templo, de onde podíamos olhar para o mar Egeu.

— Olhe lá! — disse, apontando para uma ilha comprida e montanhosa do outro lado do estreito, à nossa esquerda. — Aquela é Samos, onde Pitágoras nasceu, por volta de 582 a.C.

Pygonopolis abriu os braços num gesto largo, abarcando o estreito. — Naquela época, toda esta área, de norte a sul, era conhecida como Jônia, uma confederação frouxa de cidades gregas. Aqui, no templo de Apolo de Delfos, estamos no meio de Mileto, a cidade mais poderosa da Jônia, centro de comércio e terra natal de muitos filósofos no sentido verdadeiro, isto é, de homens que se interessavam por tudo. Aqui morava o grande Tales, matemático e professor do jovem Pitágoras. Tales era mercador e foi um grande viajante. Do Egito, da Arábia e do distante Indus trouxe a riqueza matemática que se transformaria nas bases da matemática grega. E ninguém foi mais influente no lançamento dessas bases do que o próprio Pitágoras. Porém há muito mais coisas nessa história do que a matemática, não se deixe enganar!

— De algum modo — continuou Pygonopolis —, talvez por influência de Tales, Pitágoras convenceu-se de uma doutrina admirável, que tem uma relação direta com nossa questão a respeito da existência independente da matemática. Não só a matemática tinha existência independente, no que concernia a Pitágoras, como tinha também uma influência poderosa na própria vida, o que responde a sua segunda pergunta. Pitágoras acreditava que o que chamamos de mundo real não era somente medido pelos números, não era apenas descrito pelos números, mas era efetivamente feito de números… e, como eu poderia acrescentar, não apenas de quaisquer números, mas de números inteiros. Pode chamá-lo de universo integral. Você poderia até chamá-lo de uma espécie de universo digital.

— Você é capaz de imaginar o que isso significa? — perguntou. — Toda essa ideia é muito mais audaciosa do que a tímida doutrina de Demócrito, que, cem anos depois, propôs um mundo feito de átomos, de unidades sólidas e indivisíveis. Essas, afinal, eram unidades materiais, ao passo que as unidades propostas por Pitágoras eram imateriais: os inteiros. Você consegue imaginar alguma coisa mais imaterial do que os números? Que conceito! Acredite, meu amigo, ainda estamos tentando alcançar Pitágoras.

Essas ideias rodopiavam a meu redor, arrastando-me por uma correnteza turbulenta. Era mais do que eu havia esperado. Havia também qualquer coisa do empresário em Pygonopolis, alguma coisa em que eu não conseguia confiar por completo. Sentamo-nos na escadaria do templo, fitando Samos, enquanto Pygonopolis recobrava o fôlego. Aos poucos, a Mileto do passado pareceu ganhar vida em torno de nós, obcecada com ideias que nunca morreriam.

— Tenho motivos para crer que Pitágoras veio aqui e foi a outros lugares onde pudesse fazer experimentos com, hã… a comensurabilidade. Ah, o inglês! Que palavra feia é *comensurabilidade*! Você conhece inglês, de modo que sabe o que significa essa palavra, não é?

— Hmmm, vejamos — respondi, lutando para me lembrar da definição. — Dois comprimentos são comensuráveis quando existe uma medida que cabe um número inteiro de vezes em cada um deles.

— Justamente. A *pechya* e uma dessas pedras têm comprimentos comensuráveis porque existe essa medida. Neste caso, a unidade de comensurabilidade é 1/5 de *pechya*.

Interrompi-o: — Se você me permite uma observação, a maioria das pessoas não vê necessidade de um conceito difícil como a

comensurabilidade, porque elas acham que dados dois comprimentos quaisquer sempre existe a unidade de comensurabilidade, não é? (Lá estava eu fazendo a mesma coisa que ele.)

— Justamente. E sem dúvida podem ser perdoadas por isso, já que o próprio Pitágoras certamente pensou assim, num dado momento. Mas eu estou me adiantando.

— A comensurabilidade é mais fácil de apreender — continuou — se invertermos momentaneamente as coisas. Vamos partir da unidade. Suponhamos que eu tenha uma unidade, qualquer uma, que talvez seja muito pequena. Se eu fizer dois comprimentos inteiros com essa unidade, quaisquer dois comprimentos inteiros, esses comprimentos serão comensuráveis. Suponhamos que os comprimentos sejam 5 unidades e 8 unidades. Se sua régua tiver 5 unidades de comprimento e as pedras tiverem 8 unidades, é absolutamente garantido que seu processo de medida coincida, como aconteceu quando medi o piso do templo. À medida que fui movendo a régua para posições sucessivas, medi um comprimento total cumulativo em quintos de *pechya*:

5 10 15 20 25 30 35 40

— Ora — prosseguiu Pygonopolis —, as larguras das pedras também iam sendo somadas à medida que eu as percorria:

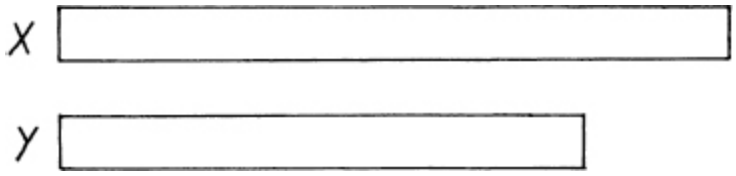
8 16 24 32 40

— Como você vê — acrescentou —, cheguei a um número comum, 40. Mais cedo ou mais tarde, a régua de 5 unidades coincidiu com as pedras de 8 unidades. O processo de medição acabou coincidindo, porque os dois comprimentos têm uma unidade comum. Isso não teve nada a ver com os inteiros em si, com o fato de eles *serem* inteiros.

Pygonopolis continuou: — Esta régua e as pedras atrás de nós são comensuráveis porque minhas mensurações finalmente coincidiram. A ligação não é óbvia, naturalmente. Eu a explicarei depois. O importante é que o fim da régua acabou coincidindo com uma fenda. No entanto, no sentido matemático, não havia nenhuma garantia implícita de que a régua viesse a fazê-lo, mesmo que o piso do templo se estendesse até o infinito! Se em algum momento a régua coincidir com uma fenda, num piso

infinitamente ladrilhado, os dois comprimentos, o da régua e o do ladrilho, serão comensuráveis. Nesse caso, existiria uma medida que caberia um número inteiro de vezes em cada um, como o nosso 1/5 de *pechya*.

— Mas, estamos sendo muito desleixados — prosseguiu. — Precisamos acrescentar alguns dados a sua definição, para fazer um teste exato da comensurabilidade de dois comprimentos. Vamos dispensar as pedras por completo e, em vez disso, falemos apenas de duas réguas. Não se trata de réguas reais, é claro, mas apenas de duas tiras de metal, cada qual com um comprimento específico. Digamos que uma tem o comprimento X e a outra, o comprimento Y. Você pode substituir quaisquer duas medidas específicas que quiser por X e Y. O que eu vou dizer agora aplica-se igualmente bem a esses dois comprimentos.



O jogo das réguas

— Esse teste de comensurabilidade — disse Pygonopolis — é como uma espécie de jogo. Podemos jogá-lo com as duas réguas. Começamos colocando as extremidades anteriores das duas réguas na mesma direção. Em seguida, deslizamos a mais curta para a frente, até sua extremidade anterior coincidir exatamente com o ponto em que antes estava sua extremidade posterior. Na verdade, acabo de lhe indicar a única regra do jogo: pegue sempre a régua cuja extremidade anterior estiver mais para trás e deslize-a para frente, exatamente pela distância de seu próprio comprimento. É isso. A questão é: será que em algum momento as duas réguas chegarão a um mesmo ponto, com suas extremidades anteriores coincidindo? Se chegarem, você ganha. Os comprimentos X e Y serão comensuráveis. Se as duas réguas nunca coincidirem, você perde. Nesse caso, elas não serão comensuráveis.

— Hmmm — resmunguei. — A pessoa pode acabar jogando pelo resto da vida, não é?

— Teoricamente, é claro que sim — respondeu Pygonopolis —, mas só sabemos disso como beneficiários da matemática moderna. Sabemos que existem pares de comprimentos com os quais o jogo das réguas nunca

terminará, mas Pitágoras não sabia. Obviamente, ele sabia que essa era uma possibilidade teórica, mas achava que ela nunca se materializaria. Ele acreditava que o mundo estruturava-se de tal modo que, quaisquer que fossem as réguas com que se começasse, sempre se ganharia o jogo.

— Como mencionei antes — continuou —, o universo pitagórico era baseado em inteiros. Em termos práticos, isso significava que todos os comprimentos, fossem eles de pedras, réguas ou qualquer outra coisa, eram inteiros, em última instância. Havia uma unidade fundamental, de modo que tudo teria uma medida inteira. Um teste possível para verificar essa teoria seria o jogo das réguas. Num mundo assim, ele deveria terminar sempre na vitória.

— Esse conceito de uma unidade fundamental — disse ainda — unificou a aritmética e a geometria de um modo particularmente simples. A aritmética tem a ver com números, e a geometria, com comprimentos. Para todo comprimento havia um número privilegiado, um inteiro, que o expressava. E todo inteiro, mais cedo ou mais tarde, revelaria ser o comprimento disto ou daquilo.

— Para Pitágoras — prosseguiu Pygonopolis —, assim como para Tales e outros gregos antigos, a aritmética e a geometria já eram tidas como aspectos de uma mesma realidade fundamental. Uma cesta de figos continha um número definido de figos, e uma pedra tinha sempre um tamanho definido. Ora, o primeiro tipo de número era o inteiro. Mas, que tipo de número se poderia atribuir à pedra? Cada régua indicava um comprimento diferente, dependendo das unidades empregadas, e raramente a dimensão de uma pedra revelava-se um inteiro exato. Estava longe de ser óbvio que existisse uma régua privilegiada, marcada com as unidades fundamentais de que venho falando, pela qual o comprimento de uma dada pedra, de todas as pedras e de todo o resto se revelasse em inteiros.

Pygonopolis fez uma pausa. — O que vou lhe dizer agora é algo que você deve ouvir atentamente. Não se incomode com o gravador. Você verá toda a matemática grega decorrer dessa história, assim como o Velocino de Ouro do Sol.

— Primeiramente — prosseguiu —, vou mostrar como Pitágoras teria provado a estreita relação entre o jogo das réguas e seu universo integral. Mas isso mal chegará a ser um espetáculo secundário, comparado ao que virá depois. O universo integral de Pitágoras desmoronou quando ele descobriu um par de comprimentos incomensuráveis. Para ele, foi uma crise

de primeira grandeza. Um certo diagraminha vindo do Egito tinha dois comprimentos que, como se podia provar, não eram comensuráveis.

As nuvens se acumulavam sobre Samos. Pygonopolis lançou-lhes um olhar preocupado.

— Para começar — perguntou-me —, qual é a ligação entre o jogo das réguas e o universo dos inteiros? Em síntese, é a seguinte. No universo integral, sempre se ganhava o jogo das réguas. Inversamente, se você sempre ganhava o jogo das réguas, devia estar num universo integral. Pitágoras não levaria muito tempo para provar isso.

Ele havia feito outra pausa para recobrar o fôlego, de modo que fiz um aparte: — Tenho curiosidade de saber como Pitágoras poderia ter chegado a essa prova, se os antigos gregos não dispunham da álgebra e nem sequer sabiam multiplicar ou dividir números, e muito menos símbolos.

— Nós, os modernos — respondeu Pygonopolis — poderíamos usar X e Y para representar os comprimentos desconhecidos, e depois usar a álgebra para provar o resultado. Você tem toda razão de assinalar que os antigos gregos não dispunham da álgebra nem de um sistema numérico eficiente. Mas tinham uma coisa quase tão boa quanto isso, quando se tratava de demonstrar resultados. Com respeito aos números, Pitágoras usava uma espécie de geometria simbólica, na qual os números eram representados por configurações de pontos. As configurações podiam ser linhas, triângulos ou retângulos, todos feitos de pontos. Por exemplo, podia-se representar o número 10 por 10 pontos enfileirados, por um retângulo com 2 pontos de altura e 5 pontos de comprimento, ou até pela famosa figura do *tetractys*, um triângulo com 4 pontos na fileira da base, 3 na seguinte, 2 na outra e 1 no alto, formando o ápice do triângulo. A representação usada para um número dependia do que se quisesse fazer com ele.

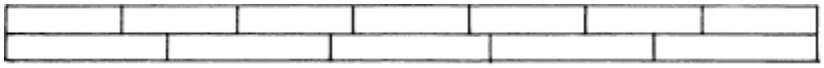
Diagramas de pontos do número 10

— Para representar ideias algébricas — continuou Pygonopolis —, como razões e produtos de quantidades desconhecidas, Pitágoras usava uma figura geométrica, talvez uma figura mostrando o resultado exitoso do jogo

das réguas com duas réguas específicas. O diagrama mostraria as posições assumidas pelas duas réguas a caminho do desfecho final e bem-sucedido.

— Aliás — acrescentou —, não tenho dúvida de que boa parte da matemática grega, considerando-se sua dependência dos diagramas e da geometria, desenvolveu-se tomando a própria Terra como seu quadro-negro. Dizem que Arquimedes foi morto por um soldado romano enquanto ponderava sobre uma figura problemática no chão. Espero sinceramente que não haja soldados romanos por perto agora!

Pygonopolis desenhou a seguinte figura:



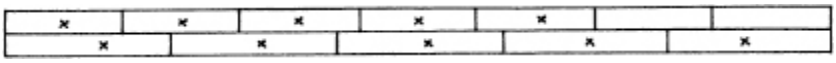
As duas réguas coincidem

— É claro — continuou ele — que ninguém sabe ao certo como Pitágoras demonstrava as coisas. Só uma coisa é certa: o uso de diagramas como parte das demonstrações formais marcou o sucesso singular da matemática grega. É um grande esforço guardar em mente a imagem detalhada de um problema enquanto se reflete sobre seus componentes. Para aliviar o cérebro desse fardo, os antigos gregos aprenderam a representar os diagramas no chão, com precisão adequada. Foi uma espécie de inovação tecnológica. A genialidade deles consistiu em aplicar a esses diagramas um ou outro tipo de raciocínio geométrico, substituindo a álgebra de que não dispunham pela lógica geométrica, que eles possuíam.

— Eis um bom exemplo — acrescentou —, e quão mais fácil é raciocinar sobre o jogo das réguas tendo esse diagrama diante dos olhos! Pitágoras o fitaria por alguns minutos, pelo menos, resmungando consigo mesmo sobre os dois comprimentos. Cedo ou tarde, diria “Ah-ah!”. Teria descoberto uma prova de que a razão entre os comprimentos da régua mais comprida e da mais curta era uma razão entre dois inteiros. A partir daí, seria um pequeno passo deduzir a existência da unidade de comensurabilidade, como veremos.

— Em seu primeiro passo crucial — disse ainda Pygonopolis —, Pitágoras equipararia cada régua curta da fileira superior com a régua longa correspondente da fileira inferior, observando que, quando contasse as réguas até o fim da fileira inferior, ainda ficava aquém do fim da superior… assim:

Pygonopolis marcou na figura as réguas correspondentes com a letra X.



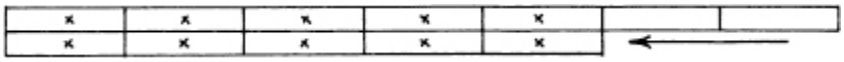
Equiparando as réguas das duas fileiras

— Bem — prosseguiu —, agora estamos com toda a fileira inferior marcada, e com apenas uma parte da fileira superior tratada da mesma maneira. Entretanto, como as duas fileiras contêm o mesmo número de réguas assinaladas, a razão entre os comprimentos dessas fileiras marcados deve ser idêntica à razão entre os comprimentos das réguas que as compõem, certo?

Isso era perfeitamente claro, disse eu. Dividir os dois inteiros da razão pelo número de réguas assinaladas em cada fileira não teria nenhum efeito sobre ela. Embora isso fosse um raciocínio moderno, ou assim me parecesse, deixei passar essa observação. Presumivelmente, os antigos gregos dispunham de uma demonstração geométrica dessa ideia.

— Ora, veja só como é bonito! — disse Pygonopolis, e prosseguiu: — Depois disso, Pitágoras imaginou que todas as réguas compridas da fileira inferior encolhessem, até chegarem ao comprimento das mais curtas.

Apressadamente, ele desenhou outra figura no chão:



Encolhendo as réguas compridas

— Você percebe o que está acontecendo, não é? — perguntou.

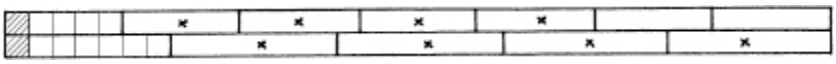
Quando observei que a fileira inferior encurtada tinha o mesmo comprimento da fileira superior assinalada no diagrama anterior, eu mesmo tive vontade de dizer “ah-ah”. Em silêncio, apontei para as duas fileiras curtas, uma em cada diagrama.

— Exatamente, elas são iguais — disse Pygonopolis. — Nos dois diagramas, a razão entre a fileira mais longa e a mais curta é idêntica. Na figura anterior, vimos que essa era simplesmente a razão entre o comprimento da régua mais longa e o da mais curta. Na segunda figura, trata-se da razão entre o número de réguas curtas e o número de réguas longas. Mas esses dois números são inteiros. Logo, a razão entre os comprimentos das duas réguas é uma razão entre inteiros.

Pygonopolis havia fornecido a demonstração principal, mas ainda faltava alguma coisa. Insisti em que ele me explicasse porque a razão entre inteiros significava que os dois comprimentos eram comensuráveis.

— Essa é a parte mais fácil — disse ele. — Como se trata de uma razão entre inteiros, 5/7, onde, 5 é o número de réguas maiores e 7 o, de réguas menores, e esta também é a razão entre a régua menor e a maior, basta dividir a régua menor por 5 e a maior por 7, que encontraremos comprimentos idênticos. Os dois representam a mesma fração das fileiras inteiras (superior e inferior), 1/35. Este comprimento é a "unidade de comensurabilidade" para as duas réguas.[a]

A demonstração não era difícil, mas minha cabeça estava rodando um pouco, como se eu tivesse recebido um transplante cerebral. A antiga matemática grega tinha um jeito bem diferente do raciocínio algébrico moderno. Arrisquei uma pergunta: — Você acabou de me mostrar como Pitágoras poderia ter demonstrado o jogo das réguas, ou seja, ganhar o jogo das réguas era equivalente à existência da unidade de comensurabilidade. Nós, da era moderna, procederíamos de outra maneira. Trabalharíamos com a razão simbólica X/Y e usaríamos a álgebra para provar o resultado. (Senti-me meio tolo ao perguntar isso, mas tinha que fazê-lo:) — Por que dois sistemas de pensamento inteiramente diferentes haveriam de chegar à mesma conclusão?



Em vez de se impacientar com minha pergunta, como eu temia que acontecesse, Pygonopolis mostrou-se satisfeito.

— Isso ilustra como duas correntes completamente diferentes de pensamento matemático chegam a uma mesma desembocadura, por assim dizer. Pensando bem, trata-se de um fenômeno de primeira grandeza. Duas abordagens completamente diferentes de um problema — nossa abordagem algébrica moderna e a antiga abordagem geométrica — levam precisamente ao mesmo resultado. Será uma coincidência? Se você encarar a matemática como uma atividade puramente cultural, perderá de vista um aspecto crucial: a meu ver, não se trata de uma coincidência.

Pygonopolis deu uma risada. — Quando algumas pessoas falam no componente cultural da matemática grega, receio que imaginem Pitágoras dançando na praia, como Zorba, com um bandolim tocando ao fundo.

O breve rufar de uma trovoada distante soou sobre o estreito que nos separava de Samos, onde as nuvens continuavam a se acumular. Pygonopolis teve um ligeiro arrepio, fitando em silêncio os diagramas no chão. Era a minha abertura.

— Se não é uma coincidência, é o quê? — perguntei.

— É, essencialmente, o fenômeno da descoberta independente, o fenômeno de uma mesma ideia encontrando uma expressão completamente diferente, por parte de duas pessoas ou grupos separados pelo espaço, pelo tempo ou pela cultura. Esse fenômeno repetiu-se milhares de vezes ao longo da história da matemática e aponta para uma coisa muito especial que se passa com ela. Suponho que minhas crenças nesse aspecto não sejam muito diferentes das de Pitágoras, pois, mesmo depois que seu universo integral se esfacelou, ele continuou a acreditar que a matemática tinha existência própria, embora não num sentido material. Mas, o que eu me pergunto é: que nome ele lhe dava?

— Pitágoras — prosseguiu Pygonopolis — era um *místico*, no sentido tradicional: uma pessoa que praticava a disciplina interna para chegar a novos níveis de compreensão. Talvez eu fale mais sobre isso amanhã. Até lá, só posso dar-lhe minha opinião: ele certamente tinha um nome para o lugar onde vive a matemática. Tentei imaginar qual seria esse nome. E meu melhor palpite é Holos.

— Holos? — repeti, já que se tratava de uma palavra desconhecida.

— O Holos é o lugar da matemática. Tem uma relação especial com o cosmo. Holos é a fonte, cosmo é a manifestação.

Pygonopolis parou, novamente sem fôlego. A palavra nova ficou ecoando em meus ouvidos. O *holos*, o holos uma bela palavra, pronunciada com a letra grega qui, um H áspero, seguido de um lamento.

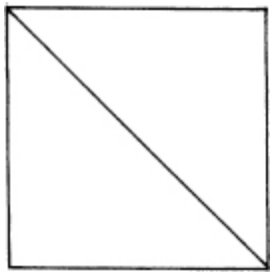
— Há pouco você descreveu o universo pitagórico de inteiros — comentei —, mas insinuou uma tragédia o tempo todo. Que aconteceu?

— Como eu disse antes — respondeu ele, em tom paciente —, o esteio principal do universo de inteiros, tal como Pitágoras o imaginava, era o que poderíamos chamar de hipótese da comensurabilidade cósmica. Qualquer par de comprimentos seria comensurável, não apenas na prática, mas também em princípio. Não há dúvida de que, durante o tempo em que acreditou nessa hipótese, Pitágoras envidou todos os esforços para prová-la. Trabalhou geometricamente, tentando uma abordagem após outra, mas seus

esforços não deram em nada. Por mais que ele desejasse que a hipótese fosse verdadeira, não conseguia prová-la. Mesmo assim, ele continuou a imaginar que os inteiros, particularmente o número um, eram os *atomos* com que os deuses faziam tudo. Ah, que golpe deve ter sido!

— Que aconteceu?

— Sua visão suprema foi abalada quando Pitágoras deparou com o primeiro par de magnitudes incomensuráveis. Talvez tenha sido seu velho professor, Tales, quem lhe sugeriu que verificasse a comensurabilidade do lado do quadrado com sua diagonal. Veja só, é assim:



Quadrado com uma diagonal

— Se o universo se baseasse em inteiros — prosseguiu Pygonopolis —, todos os pares de comprimentos seriam comensuráveis, inclusive os dois comprimentos desse pequeno diagrama de aparência inocente. Um dos comprimentos é o lado do quadrado, cujos quatro lados têm todos um comprimento igual. O único outro comprimento da figura é o da diagonal. Não faz diferença o tamanho da figura desenhada, já que só estamos interessados na razão entre os dois comprimentos. Era ou não uma razão de inteiros?

— É possível — disse Pygonopolis — que Pitágoras tenha matutado sobre isso por mais tempo do que deveria. Às vezes, os matemáticos demoram a descobrir a verdade sobre uma ideia dileta, porque gostam de imaginar que ela é verdadeira e estão sempre tentando encontrar um modo de comprová-la. Nunca procuram seriamente refutá-la. Mas, nesse momento, Pitágoras viu-se diante de um caso probatório a ser considerado. Quanto tempo terá levado para perceber que se tratava do que chamamos de um contraexemplo?

— Mas, um dia — prosseguiu ele —, a resposta surgiu. A descoberta o desconcertou, pois reduziu o cosmo baseado em inteiros a um gigantesco nada. Superado esse choque, Pitágoras sentiu uma gratidão imensa por se

haver finalmente resolvido a questão da comensurabilidade: pela negativa, como se constatou. Até esse momento, a matemática grega só reconhecia dois tipos de números: os inteiros e suas razões. Nesse momento, pareceu existir um terceiro e misterioso tipo de número, que clamava por uma revisão do pensamento. Havia-se descortinado um novo mundo.

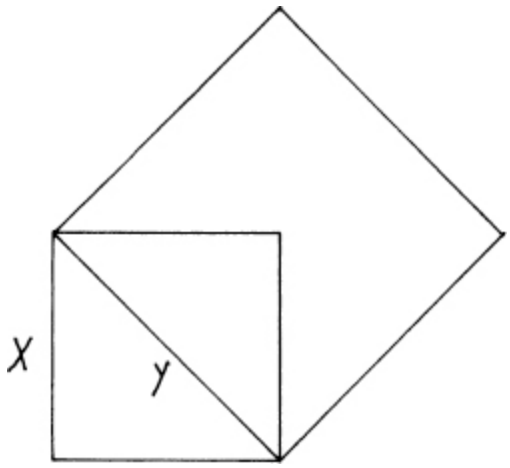
— E é nesse ponto — acrescentou Pygonopolis — que entra em jogo o elemento cultural: a gratidão de Pitágoras foi tão grande, que ele se dirigiu a um templo (talvez tenha sido este aqui) e sacrificou um boi. Nós, modernos, aliás, não entendemos o sacrifício. Imagine alguém sentir-se tão grato por um acontecimento maravilhoso que, para aliviar o coração do fardo da alegria, comprasse um Mercedes e lhe ateasse fogo!

— O argumento que Pitágoras usou para mostrar a incomensurabilidade entre o lado do quadrado e sua diagonal — disse ainda Pygonopolis — é bem simples, se o escrevermos em seu simbolismo moderno, mas vamos demonstrá-lo mais ou menos como fez Pitágoras. Não usaremos a álgebra, portanto, mas vamos admitir nomes de letras para designar partes do diagrama. Em particular, vamos dar ao lado do quadrado o nome de X e à sua diagonal o de Y. Essas não são, como você há de concordar, variáveis algébricas. Vamos começar pela própria figura que Tales mostrou a Pitágoras.

Pygonopolis fincou seu graveto na figura de Tales e disse:

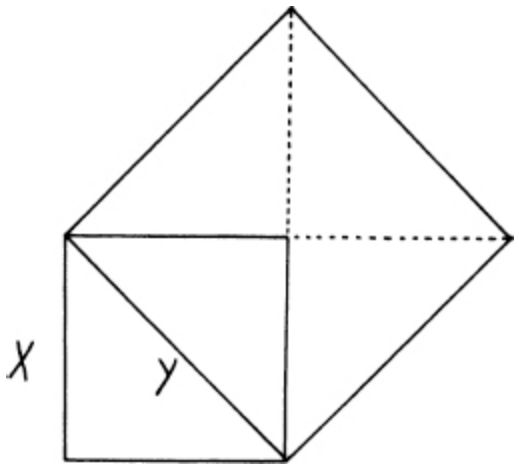
— Tales estivera no Egito e havia aprendido muitas coisas esplêndidas com os sacerdotes egípcios, inclusive esse pequeno fato interessante sobre o lado do quadrado e sua diagonal.

Desenhou então um segundo quadrado, inclinado em relação ao primeiro. Um dos lados do novo quadrado era a diagonal do primeiro.



Quadrado com quadrado em sua diagonal

— Os egípcios — prosseguiu Pygonopolis —, que lutavam com as mesmas restrições que os gregos, tinham tido a agudeza de descobrir uma relação curiosa entre os dois quadrados. O maior tinha o dobro da área do menor. A demonstração egípcia era simples. Bastava acrescentar 2 linhas novas, assim, para perceber que o quadrado grande era dividido em 4 triângulos pequenos, enquanto o quadrado pequeno já estava dividido em 2 desses mesmos triângulos: 4 é o dobro de 2. *Quod erat demonstrandum*, como dizem os textos antigos.



Demonstração egípcia da relação

Pygonopolis apagou cuidadosamente com a mão as duas linhas de construção, restaurando a figura anterior. Distraído, esfregou a mão no terno e proferiu uma imprecação. — Arrg! Mas, que estupidez! Olhe só o que eu fiz! — disse, e passou alguns instantes tentando tirar a mancha, com o cenho franzido.

— Depois de uma certa dose da sondagem usual que os matemáticos costumam fazer — continuou —, Pitágoras descobriu o primeiro passo de sua demonstração. Se presumisse que X e Y eram comensuráveis, X e Y teriam ambos medidas inteiras utilizando a unidade de sua comensurabilidade. Ele também insistiu em que essas medidas inteiras deveriam ser as menores a ter essa propriedade; ou seja, não poderiam ter um divisor comum.

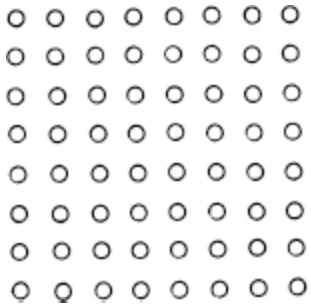
— Ele soube — prosseguiu Pygonopolis — visualizar não apenas as linhas X e Y como fileiras de pontos (as unidades), mas também os dois

quadrados compostos por esses pontos. Em particular, o número de pontos do quadrado grande era par, era o dobro do número de pontos do quadrado pequeno. Então, Pitágoras se perguntou: pode um número ímpar ser elevado ao quadrado e produzir um número par?

— Meu caro professor Pygonopolis — interrompi. — Achei que você tinha dito que Pitágoras não dispunha da álgebra, e presumi que isso significasse que não haveria elevação ao quadrado.

— Não, não, não, Dewdney. Como já expliquei, os gregos antigos sabiam multiplicar pela geometria, o que também significava a operação de elevar ao quadrado. Nesse caso, ele desenhou um número como uma fileira de pontos. Para elevar geometricamente esse número ao quadrado, ele literalmente fez um quadrado com ele. Acrescentou mais fileiras de pontos acima da primeira, tantas quantas foram necessárias para produzir uma forma quadrada. Na verdade, é daí que vem a expressão inglesa elevar ao quadrado. Seja como for, o número total de pontos do quadrado é o produto do número de pontos da base e do lado vertical.

— Pitágoras certamente já sabia — continuou —, e já havia demonstrado, que quando assim se elevava um número ímpar ao quadrado, o número total de pontos do quadrado era sempre ímpar. E, quando se elevava ao quadrado um número par, o resultado era sempre par. Ora, de acordo com os egípcios, o quadrado maior tinha o dobro da área do menor. Isso significava que essa área, ou o número de pontos existentes nela, era par. Mas, como já vimos, isso só poderia acontecer se o comprimento do lado que estava sendo elevado ao quadrado, ou seja, Y, também fosse um número par.



Usando um número ao quadrado geometricamente

Pygonopolis prosseguiu: — Nesse ponto, as coisas se aceleraram. Se Y tivesse um número par de pontos, seu quadrado teria não somente um

número par de pontos, mas um número de pontos múltiplos de 4, como dizemos em linguagem moderna.

— Agora — acrescentou —, lembre-se do teorema egípcio: o quadrado de Y era o dobro do quadrado de X. Entretanto, o quadrado de Y era também um múltiplo de 4. Isso queria dizer que o quadrado de X devia ser múltiplo de 2. Você está percebendo aonde isso leva, não está?

— Você vai aplicar todo esse mesmo raciocínio ao X? — arrisquei.

— Exatamente. Pitágoras pôde então aplicar a X o mesmo raciocínio que havia aplicado a Y, finalmente concluindo que os dois comprimentos compunham-se de um número par das unidades fundamentais de comensurabilidade que os formavam. Isso queria dizer que, se cada um dos dois inteiros fosse cortado pela metade, seriam obtidos novos inteiros menores, com a mesma propriedade: sua razão tornaria a ser X para Y. Entretanto, como os inteiros em questão já eram os menores possíveis, isso era uma contradição. A lógica recusava-se a continuar cooperando. A máquina parou. Em casos como esse, os matemáticos gregos, tal como nós, modernos, sabiam que um dos pressupostos que entravam na demonstração devia estar errado. Apenas um único pressuposto tinha sido formulado: o de que os comprimentos de X e Y eram comensuráveis. A contradição significava que não poderiam sê-lo.

Pygonopolis deu um suspiro, aparentemente para recobrar o fôlego. — Você consegue imaginar? Consegue imaginar esse momento para Pitágoras? Não havia como duvidar do novo resultado. Em vez de comprovar o teorema buscado por tanto tempo, “Todo par de comprimentos é comensurável”, ele havia provado exatamente o inverso: “Existe um par de comprimentos que são incomensuráveis.” Embora isso condenasse sua doutrina, pelo menos na forma em que ela existia, atrevo-me a dizer que Pitágoras ficou secretamente satisfeito. Pressentiu que havia um terreno mais elevado adiante, como se ele estivesse escalando o próprio Olimpo. O *atomos* numérico era mais profundo e mais complexo do que ele havia pensado. Havia um outro tipo de número no holos e, portanto, no cosmo. Não era um inteiro, nem tampouco uma razão entre inteiros. Nós, modernos, chamamos esses números de irracionais, querendo apenas dizer com isso que eles não são números racionais.

As nuvens de tempestade continuavam a se acumular sobre o estreito onde ficava Samos. Os trovões ressoavam com mais e mais frequência sobre o mar.

A tarde já chegava ao fim. Pygonopolis pegou seu chapéu e andou em direção ao templo. Fiquei em transe, vendo-o apanhar sua maleta e tornar a descer os degraus, dando um sorriso largo.

— Tenho a impressão de havê-lo aturdido de algum modo. É excitante essa história de Pitágoras com os incomensuráveis. Ela mostra muitas coisas sobre a matemática primitiva, mas só precisamos forçar um pouquinho a imaginação para entender como devem ter trabalhado os primeiros matemáticos.

Cumprimentei-o com um aceno de cabeça quando nos encaminhamos para nossos carros separados. Caiu uma chuva forte enquanto rumávamos para o norte, em direção a Izmir. Eu tivera a esperança de ponderar sobre as coisas que havia aprendido nesse dia enquanto dirigia o carro, mas não houve nenhum momento de calma para a reflexão. Ao contrário, passei por um aperto para manter o ritmo da Mercedes alugada por Pygonopolis. Ele dirigia feito um louco, apesar das condições precárias da estrada. Fiquei profundamente aliviado quando chegamos aos arredores de Izmir.

Jantamos juntos nessa noite, Pygonopolis e eu. Foi um jantar no hotel, à base de frutos do mar do Mediterrâneo. Fazendo-lhe perguntas sobre o holos e comendo enquanto ele falava, consegui acabar muito antes dele.

— Mas, o que é exatamente o holos, na sua opinião? — indaguei.

— O holos é o lugar onde existe toda a matemática, tanto a conhecida quanto a ainda desconhecida — ele respondeu, animado.

— Lá estão as definições, os axiomas, as regras de dedução, os teoremas e as demonstrações. Lá estão também todos os números, os sistemas numéricos, os conjuntos, as famílias de conjuntos etc. etc. etc.

— Mas, o que eu realmente quero saber — insisti — é como essas coisas podem existir. Elas têm uma existência independente, como esta cadeira?

— A resposta é sutil — disse ele —, porque a existência dessas coisas parece depender da mente humana, mas não depende. Pense no número 3, por exemplo. Toda vez que existem 3 unidades de alguma coisa, o número 3 também está presente, e não apenas como conceito.

— Aqui, por exemplo — prosseguiu —, restam 3 camarões no meu prato. Apenas 3. A “tresice” desses camarões controla o número adicional de camarões que poderei comer sem pedir outros. Em suma, não posso comer mais camarões do que os que estão em meu prato. A “tresice” dos camarões não só é patente para nossos sentidos e nosso cérebro, como tem

também uma importância operacional que ultrapassa minha concepção do três. Minha impossibilidade de comer mais do que 3 camarões do meu prato não tem nada a ver com minha concepção do três, nem tampouco com o fato de ser eu que estou sentado aqui. Qualquer outra pessoa enfrentaria as mesmas alternativas. Do mesmo modo, se eu pedir mais 10 camarões, posso calcular que o número de camarões em meu prato passará a ser 13. Nesse e em muitos outros aspectos, tanto simples quanto complexos, a matemática controla o mundo. É desse modo que o holos e o cosmo se interligam.

— Se estou entendendo bem — disse eu —, o holos é um lugar real, embora não no nosso sentido comum de ser localizável no nosso universo, ou no cosmo. No entanto, ele também controla, pelo menos até certo ponto, o que acontece em nosso mundo, no cosmo. O que não está claro para mim é quanto dessa teoria se deve a Petros Pygonopolis e quanto se deve a Pitágoras.

— A teoria do holos, tal como a descrevo — respondeu Pygonopolis —, é inteiramente minha. É uma fantasia ampliada, se você quiser. Mas não consigo deixar de acreditar que Pitágoras pensava na matemática basicamente nesses mesmos termos. Ele havia percebido como os números desaparecem quando se considera aquilo que une todas as coleções de 3 coisas. Também tinha visto como as linhas desaparecem, à medida que são desenhadas com precisão cada vez maior, delicadamente traçadas em pedras lisas e planas. Já naquela época, como qualquer um pode fazer hoje em dia, ele havia testemunhado que esses conceitos se distanciam ao serem perseguidos, como se fugissem de volta para o holos. Noutros momentos, no entanto, avançam e assumem o controle.

— Hoje à tarde, você fez uma piada sobre Pitágoras dançando ao som de música de bandolim na praia — observei, já que não tinha entendido essa referência anterior. — Presumo que ele não o tenha feito, realmente; sendo assim, que papel a antiga cultura grega desempenhou de fato na matemática grega?

— Permita-me fazer uma analogia — disse Pygonopolis. — A matemática é como a roda. Quase todas as culturas têm sua roda, e todas as rodas feitas por culturas diferentes têm uma aparência diferente. A roda de uma carruagem egípcia é muito diferente da de um carro de boi da Europa medieval, e essas duas rodas, por sua vez, são diferentes das de um automóvel moderno. No entanto, todas as rodas funcionam com base em exatamente os mesmos princípios.

— Não obstante — prosseguiu ele —, as pistas culturais têm uma importância crucial para se entender a matemática grega: não tanto sua validade ou sua universalidade, mas sua direção. Por um lado, você não verá nada descoberto por meus antepassados que não pudesse ter sido descoberto por um habitante das ilhas Salomão. Contudo, talvez você também constatasse que o ilhéu salomônico não se interessaria muito pelos problemas de Pitágoras, donde seria muito improvável que os investigasse. Foi a cultura grega antiga que moldou a mente de Pitágoras. No centro dessa cultura estavam os deuses. Ele os aceitava como seres perfeitamente reais, e suas reflexões mais profundas sobre a natureza última do cosmo incluíam os deuses, necessariamente. Ele acreditava na ideia de uma presença controladora, como Zeus, auxiliada por outras presenças do panteão. Mas esse era o cavalo que puxava sua carroça, e não a carroça em si, por assim dizer. Foi uma coisa que motivou sua busca, chegou até a inspirá-la, mas não desempenhou nenhum papel no que Pitágoras efetivamente descobriu, a não ser, é claro…

Pygonopolis havia começado a transpirar profusamente depois de terminar a refeição. Fez uma pausa para passar um lenço no rosto, antes de continuar.

— Digamos apenas que, no que concernia a Pitágoras, a presença controladora havia deixado umas pistas a seu próprio respeito, e Pitágoras, ansioso por escalar o Olimpo, colocou-se no papel de herói cultural. Ele viu na matemática o caminho para um conhecimento do qual somente os deuses desfrutavam. As consequências lógicas residiam no próprio tecido da vida. Certamente, era assim que os deuses *funcionavam*.

Pygonopolis fitou-me intensamente com seus olhos castanhos escuros. Os pelos da minha nuca se arrepiaram e, por um instante, senti que ele sabia muito mais do que estava dizendo. Ocorreu-me que ele, Pygonopolis, realmente acreditava nos deuses de outrora; mas então, de repente, a sensação passou.

— Amanhã de manhã, vamos pegar o avião para Atenas — disse ele. — Já é tarde.

Pygonopolis olhou para o relógio e, ao fazê-lo, revelou a palma da mão esquerda. Havia uma tatuagem nela — uma pequena estrela azul. Desviei rapidamente o olhar, assim que ele ergueu os olhos do relógio e me fitou.

Ao nos despedirmos, ele observou: — Você não sabe o que significa para mim ter um verdadeiro ouvinte.

a A parte hachurada da figura abaixo corresponde a 1/35 de uma fileira. (N.R.T.)

CAPÍTULO 2

O NASCIMENTO DE UM TEOREMA

De manhã cedo, Pygonopolis e eu pegamos um micro-ônibus para o aeroporto e embarcamos no voo para Atenas. O avião alçou voo sobre o Egeu, deixando para trás a ilha de Samos, que desapareceu sob nossas asas para os lados do sul. Havia um sol brilhante, que só fazia aprofundar o azul do mar lá embaixo. Pygonopolis cutucou-me ao ver um petroleiro, aparentemente imóvel, que ia deixando uma pálida esteira branca.

— Você precisa imaginar o Mediterrâneo há 2.500 anos — disse. — Nada de navios daquele tamanho, mas somente pequenas embarcações a vela, que você mal notaria desta altitude. Ah, que tempos, aqueles! Gregos, egípcios, fenícios, berberes e todo o resto. O Mediterrâneo era o centro de um mundo heroico, a era homérica, na qual os deuses governavam. Desta altitude, mal perceberíamos o barquinho que levou Pitágoras de Mileto a Crotona, uma colônia grega na Itália, onde ele viria a fundar uma escola dedicada à razão e ao mistério.

— Ao mistério? — perguntei.

— É, algo assim como os mistérios de Elêusis, uma escola ocultista de alunos criteriosamente selecionados, capazes de levar adiante o trabalho de Pitágoras quando ele morresse. Hoje, mais tarde, se os deuses ajudarem (nesse ponto, ele deu uma piscadela, para me informar que não estava falando inteiramente a sério), estaremos em minha sala na Universidade de Atenas e eu lhe contarei a história da maior realização de Pitágoras. Enquanto isso, temos umas coisinhas que ficaram pendentes ontem à noite.

— Que coisinhas? — indaguei.

— A respeito do erro e dos números. Estive refletindo, pouco antes de dormir, sobre como essa história de estarmos errados, da possibilidade de o

erro espreitar cada um de nossos passos, é o que dá sentido à investigação matemática. Nem todos entendem o que Francis Bacon quis dizer quando afirmou que “A verdade provém mais facilmente do erro que da confusão”. Em outras palavras, é melhor trabalhar com uma hipótese que venha a se revelar errada do que não ter hipótese nenhuma.

— Você acha que Pitágoras compreendia que sua ideia de o cosmo basear-se em inteiros podia estar errada? — perguntei.

Pygonopolis empertigou-se na poltrona, numa espécie de falsa perplexidade.

— É claro! Nós, os gregos, inventamos a palavra *hypóthesis*. *Hypo* significa “subjazer”, e *thesis* quer dizer “ideia” ou “teoria”, pelo menos nesse contexto. Trata-se de um alicerce que se deve testar antes de construir o que quer que seja sobre ele. Aquele diagraminha vindo do Egito derrubou esse alicerce. Obrigou Pitágoras a abandonar sua hipótese. Por outro lado, ele ficou livre para modificá-la, e é bem possível que o tenha feito. Não temos informações sobre esse fato particular. Mas, como ele e a irmandade que depois veio a fundar continuaram a tomar o número como base da realidade, é bem possível que ele tenha aberto espaço para acolher os novos números. Afinal, eles prometiam completar a ligação entre a geometria e a aritmética, o que me leva à segunda coisa que ficou pendente.

— É uma ironia — prosseguiu Pygonopolis — que aquelas retas que os antigos matemáticos desenhavam para formar suas figuras já incorporassem os novos números. Eles sabiam muito bem que, se marcassem um ponto numa linha reta e começassem a medir numa direção, todos os pontos da linha ficariam a uma certa distância do ponto fixado. Até o desastre dos incomensuráveis, Pitágoras afirmaria que todas as distâncias eram racionais, e portanto, que todos os pontos da linha correspondiam a números racionais.

— Ora — continuou —, se tomarmos o lado do quadrado egípcio como uma unidade de distância numa escala qualquer, a área do quadrado também será uma unidade, ou 1. Mas, como você deve estar lembrado, pela discussão de ontem, o quadrado da diagonal era o dobro dessa área, ou 2. Isso significava que o comprimento da diagonal, quando elevado ao quadrado, era 2. Portanto, Pitágoras sabia que essa nova magnitude incomensurável, a que não podia ser conciliada com nenhum inteiro ou número racional, era a raiz quadrada de 2. Considero interessante que Pitágoras tenha chamado esse novo tipo de número de αλογοσ [a-logos], ou

“ilógico”, enquanto nós o chamamos de *irracional*, com o sentido daquele “que não tem uma razão”.

— A raiz de 2 — acrescentou Pygonopolis — não era um número racional, e isso, por sua vez, só podia significar que a compreensão que eles tinham de uma coisa tão banal quanto uma linha reta era lamentavelmente incompleta. Qualquer reta inteiramente composta de números racionais teria uma lacuna infinitesimal, onde supostamente deveria estar a raiz quadrada de 2. E se também houvesse muitos outros números ilógicos? Para não falar em tipos completamente novos de números ilógicos. Só no século XIX foi que tivemos uma imagem completa do chamado *continuum*, ou linha reta. Como se verificou, os irracionais eram mais numerosos do que os racionais, por uma ordem inteira de infinidade. Todavia, também descobrimos que não havia outros tipos de números a serem descobertos no *continuum*: nada além de inteiros, racionais e irracionais.

— Pitágoras realmente via os números irracionais como ilógicos? — perguntei.

— Essa é uma tradução ruim. É claro que Pitágoras chegou a eles por um processo de lógica, donde, a rigor, eles não eram ilógicos. *Alogos* tem mais o sentido de fora do mundo, ou fora dos limites, como vocês ingleses costumam dizer.

Voamos juntos para Atenas, Pygonopolis e eu, e depois seguimos de carro para a Universidade de Atenas, passando pela colina alta que é dominada pelo Parthenon. Ladeando a rua abaixo do antigo templo, centro da antiga Atenas, havia prostitutas de ambos os sexos. Pygonopolis deu um estalo com a língua e, de repente, soltou uma gargalhada. — Isso me lembra uma piada. Qual é a segunda profissão mais antiga do mundo?

Confessei não saber. — A matemática, é claro! — disse ele, dando um tapa no joelho. Quando parou de rir, perguntou-me: — Em que outro campo da investigação humana encontramos resultados de 2.500 anos que ainda são ativamente usados?

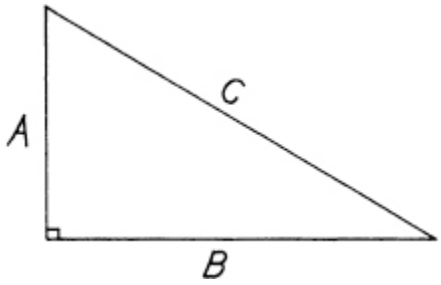
Concordei com um aceno de cabeça, enquanto ele estacionava o carro.

Sua sala dava para um pátio encantador, cheio de oliveiras e figueiras. — Eu me abaixaria para desenhar figuras no chão — disse Pygonopolis —, mas o quadro-negro é mais conveniente.

— Agora estou em condições de concluir a história de Pitágoras — prosseguiu. — Ontem, assistimos à morte de uma teoria. Hoje vou lhe falar

do nascimento de um teorema, o maior dele. Imagino que você saiba a qual estou me referindo.

Pygonopolis desenhou um triângulo retângulo no quadro, marcando os lados com as letras A, B e C.



Começa o teorema de Pitágoras

Em seguida, desenhou um quadrado de cada um dos lados e marcou o lado chamado de C com a palavra “hipotenusa”.

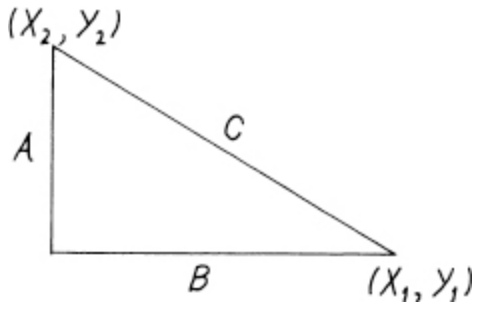
— O teorema de Pitágoras — disse —, como você sabe, diz que, ao elevarmos ao quadrado os comprimentos dos três lados de um triângulo retângulo, prevalece uma certa relação entre os quadrados. O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. Algebricamente, escrevemos:

$$C^2 = A^2 + B^2$$

— É um teorema estranho — prosseguiu ele —, que se insinua no teorema recém-introduzido. Se eu disser a uma pessoa que a área do quadrado grande do lado comprido da figura é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados, com certeza ela se sentirá tentada a dizer: “E daí?” E eu respondo que essa afirmação é válida em relação a todo e qualquer triângulo retângulo possível, sem exceção. E acrescento que a veracidade dessa afirmação não é óbvia. Grande Zeus! Por que diabos deveria haver essa relação particular entre os quadrados dos três lados? Por que não uma outra? E por que haver alguma relação?

— E se isso não a impressionar — continuou Pygonopolis —, direi a essa pessoa que o teorema é não apenas verdadeiro, mas também que se encontra na base de todo e qualquer assunto geométrico, e é essencial para uma miríade de cálculos que fazemos todos os dias. Por exemplo, situamos pontos no espaço físico através de suas coordenadas, digamos, X e Y, para

desenvolver a argumentação. Veja — e Pygonopolis acrescentou as coordenadas à figura do quadro-negro.



O teorema tem muitas aplicações

— Essas coordenadas — disse ele —, como as de um mapa plano, situam qualquer ponto por meio de dois números, medidos a partir de um ponto fixo, esteja ele dentro ou fora do mapa. Existe uma medida horizontal, a coordenada X, e uma vertical, a coordenada Y. Quais são os comprimentos dos lados A e B? Ora, são simplesmente as diferenças (X1 – X2) e (Y1 – Y2). Agora, eleve esses comprimentos ao quadrado e some-os. Você terá o quadrado da distância entre os dois pontos. Depois, tire a raiz quadrada disso, e você terá a distância efetiva. Esse cálculo é repetido milhões de vezes por dia, nos computadores direcionais dos aviões, dos navios e das naves espaciais.

— Pensando bem — acrescentou Pygonopolis —, esse teorema ilustra o que você chamou de “poder absurdo” da matemática. Se o teorema de Pitágoras não fosse verdadeiro, num sentido muito essencial, os aviões se chocariam, os navios encalhariam e as naves espaciais se perderiam para sempre. E por quê? Porque o espaço em si tem as propriedades presumidas pelo teorema. Eu poderia falar muito mais sobre esse assunto, mas receio perder o fio da meada.

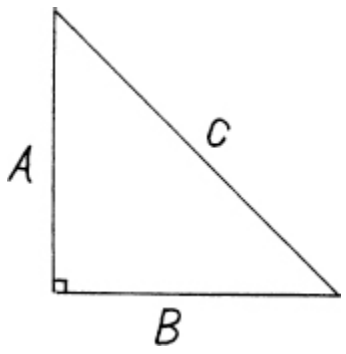
— Perfeitamente — retruquei —; vamos saber do nascimento do teorema. Fale-me das aplicações depois, por gentileza.

— Como foi que Pitágoras descobriu esse teorema surpreendente? — indagou Pygonopolis. — Você deve estar lembrado de que o mundo digital dele desmoronou com a descoberta dos números incomensuráveis. Como sugeri ontem, Pitágoras ficou secretamente radiante. Sentiu que havia um plano mais elevado à frente, como se estivesse escalando o próprio Olimpo.

Havia um outro tipo de número à espreita na geometria e, portanto, no mundo.

— Onde mais sondar esse novo e misterioso universo — continuou ele —, senão na figura que se revelara tão problemática, para começo de conversa? Refiro-me àquele quadradinho ardiloso do Egito.

Pygonopolis desenhou a figura original do quadrado, com sua diagonal, apagou metade dela, revelando um triângulo retângulo, e depois designou a diagonal por C e os outros dois lados por A e B.



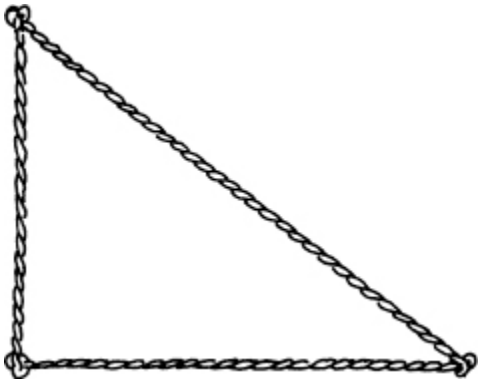
Primeiro exemplo do teorema

— Na demonstração de ontem — continuou Pygonopolis —, vimos que $C^2 = 2A^2$. Esse foi o cerne da argumentação que mostrou que A e C não podiam ser comensuráveis. Que coisa justa e apropriada que a fonte do problema, aquela maldita doença egípcia, fosse obrigada, ela própria, a tossir um resultado inteiramente novo, à guisa de compensação! É que o teorema que Pitágoras suspeitava ser verdadeiro já estava escondido nesse diagrama. Ele pôde perceber que C^2 era igual a A^2 mais B^2. Em outras palavras, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados. Aqui, os lados A e B são iguais. Isso foi essencial para o teorema, não é?

Pygonopolis não esperou por minha resposta, mas seguiu afoitamente adiante:

— É claro que não! A mesma coisa se aplicava aos outros triângulos retângulos. Por exemplo, fazia séculos que os egípcios conheciam uma figura especial, chamada triângulo 3-4-5. É evidente que os construtores egípcios usavam esse triângulo como uma fonte já disponível de ângulos retos. Eles usavam uma corda comprida, com as pontas cuidadosamente amarradas. Outros dois nós feitos na corda dividiam-na em três partes, e os

comprimentos dessas partes eram 3, 4 e 5 côvados, digamos. Pois bem, quando eles esticavam bem essa corda, colocando um prego em cada nó, veja só: aparecia um triângulo retângulo! Com esse instrumento, era possível traçar ângulos retos perfeitamente adequados para os prédios e monumentos.



O truque da corda egípcia

— Foi Tales, sem dúvida — acrescentou Pygonopolis —, quem falou desse truque a Pitágoras. Como poderia algum deles deixar de notar que havia uma relação especial entre os três lados, quando eles eram elevados ao quadrado?

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

— E como poderia Pitágoras — prosseguiu — deixar de desconfiar que a mesma coisa se aplicava aos outros triângulos retângulos? A princípio, ele estendeu seu estudo aos triângulos retângulos em que todos os lados tinham comprimentos inteiros, comprimentos de números inteiros, como o triângulo 3-4-5. Hoje nós os chamamos de triângulos pitagóricos. É provável que ele lhes tenha dado um nome diferente. Vou chamá-los de *atomagonos*, ou, para você, *atomógonos*. Todos os lados desses triângulos, diversamente dos lados do triângulo problemático, tinham comprimentos inteiros e, portanto, eram todos comensuráveis não havia raízes quadradas de 2 espreitando em parte alguma. Pitágoras sabia que, se o teorema fosse válido para todos os triângulos retângulos, quer tivessem lados comensuráveis, quer não, ele seria válido para todos os atomógonos. E não estava errado, como se constatou.

— Não há dúvida — continuou Pygonopolis — de que Pitágoras examinou um bom número de atomógonos, enquanto lutava para chegar ao grande teorema que hoje leva seu nome. Com os computadores, não é difícil escrever um programa simples, que gere quantos atomógonos você quiser. Alguns deles, sem dúvida, também foram descobertos por Pitágoras. Como lhe seria possível não descobri-los? Eles já estavam no holos, à espera de serem descobertos. Aqui estão todos os atomógonos com lados de comprimento igual a 25 ou menos.

Pygonopolis entregou-me um papel.

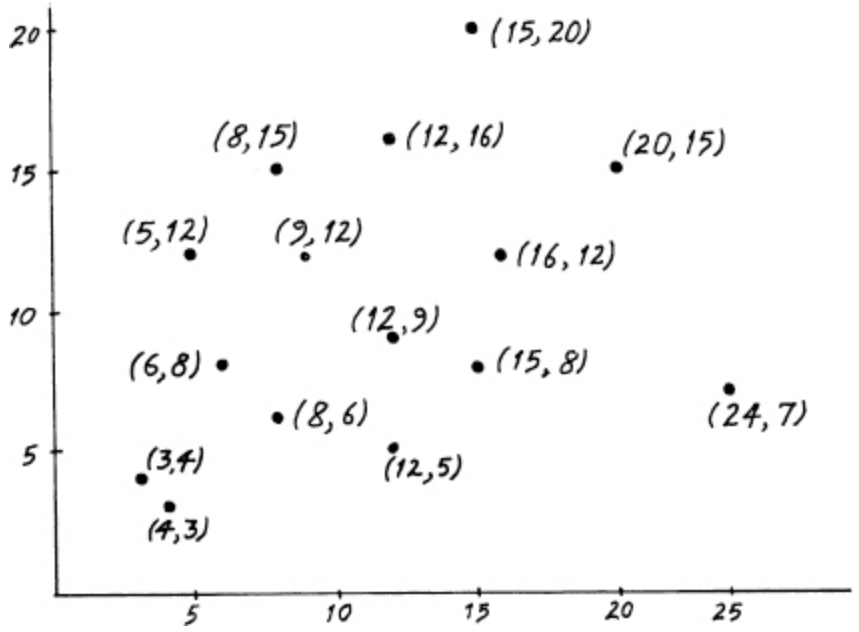


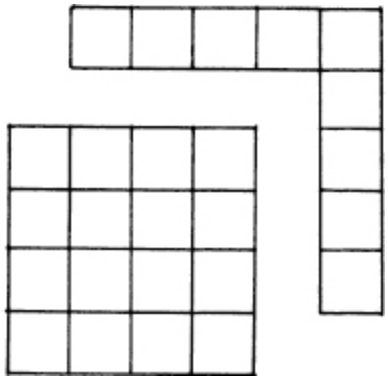
Tabela gráfica dos atomógonos

Examinei cuidadosamente a tabela. Não havia triângulos, como se poderia esperar, mas pares de números. Levei alguns instantes para perceber que o par (3, 4) significava, na verdade, o triângulo 3-4-5, e que cada um dos outros pares de números representava os comprimentos de dois lados de um triângulo retângulo. Para descobrir a hipotenusa em cada caso, bastava elevar ao quadrado os números do par, somá-los e tirar a raiz quadrada. Os dois números do atomógono (65, 82), por exemplo, produziram a soma e 9.409 revelou-se o quadrado de 97. Esse era o comprimento da hipotenusa.

$65^2 + 72^2 = 9.409$,

— Mas, isso não é nada — disse Pygonopolis —, por mais maravilhosos que sejam os computadores. Pitágoras descobriu um meio de gerar atomógonos de qualquer tamanho, sem usar um computador. O método dependia de uma certa forma sumamente importante, chamada *gnômon*, antiga denominação grega de um esquadro de carpinteiro, um instrumento plano que se compunha de duas tiras retangulares, unidas em ângulo reto, como um suporte angular.

— Para construir um de seus atomógonos — prosseguiu —, Pitágoras partia de um quadrado de lado A, um inteiro. Depois, encaixava um gnômon de uma unidade de largura no canto do quadrado, com isso produzindo um quadrado ligeiramente maior, de lado A + 1. Por exemplo, se o lado A fosse 4, ele pegava um gnômon de largura 1 e o encaixava no canto do quadrado. Veja aqui no quadro.



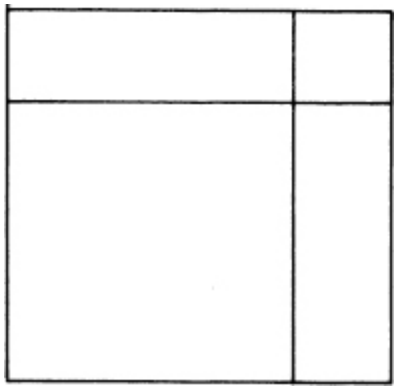
Somando um gnômon a um quadrado

— A área do gnômon, o número de unidades quadradinhas que havia nele, era ímpar, não era? — perguntou Pygonopolis. — Ele se compunha de dois braços cujo comprimento conjunto era par, acrescido da unidadezinha do canto. Se acontecesse de esse número ímpar ser também um quadrado, como o 9 da minha figura, ele teria um número ímpar da forma B^2, e estava terminado. É que, nesse caso, ele teria três números quadrados, dois provenientes dos quadrados geométricos e o terceiro, do gnômon: o primeiro número quadrado vinha do quadrado geométrico com que ele havia começado, aquele de lado A, e o segundo provinha do gnômon, que não era um quadrado em si, mas tinha um número quadrado de unidades e o terceiro número quadrado vinha do quadrado geométrico obtido pela soma do gnômon ao primeiro quadrado. Certamente era verdade que a soma dos dois primeiros quadrados seria igual ao terceiro, não é?

— Seria — respondi —, mas, como é que ele descobria os valores de B com que esse esquema funcionava?

— Pitágoras só tinha que contar o trajeto pelos números ímpares: 1, 3, 5 e assim por diante. Toda vez que chegava a um número quadrado, ele tinha um novo atomógono. Veja só, experimente. O 7 é quadrado? Não. O 9 é? Sim, de fato. O atomógono, nesse caso, teria os lados 3, 4 e 5, nosso velho truque egípcio da corda. É claro que esse método específico pecava por uma limitação. O gnômon era sempre uma tira de largura 1, de modo que os atomógonos produzidos sempre tinham dois lados que diferiam em apenas 1 unidade. Devo acrescentar, sem entrar no mérito desse assunto aqui, que Pitágoras logo descobriu um modo de ampliar seu método, de modo a poder enfim gerar todos os atomógonos.

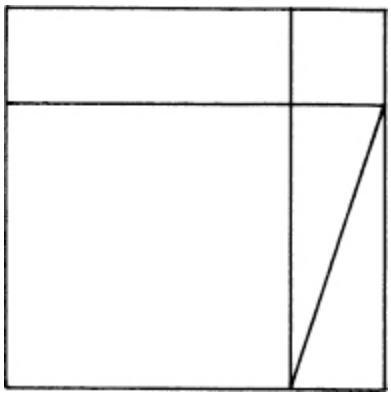
— Concluída a sua investigação dos atomógonos — continuou Pygonopolis —, Pitágoras havia criado o teorema de todos os triângulos retângulos com lados inteiros. É possível que tenha sacrificado outro boi. Ele percebeu, graças à figura egípcia que Tales lhe mostrara, que havia triângulos retângulos que não eram atomógonos. A questão era saber se essa revelação dos atomógonos poderia fornecer a descoberta fundamental de que ele precisava para completar o teorema dos quadrados. Em caso afirmativo, o que seria ela? Aqui está o diagrama favorito de Pitágoras na época, aquele a que sua intuição o tinha guiado. Talvez ele o tenha fitado por horas e horas, obcecado com a ideia de que a solução estava bem diante dos seus olhos.



Quadrado com o gnômon acrescentado

— Como você vê — disse Pygonopolis —, ele fizera uma ligeira mudança no gnômon, recortando seu canto num quadrado separado. Assim,

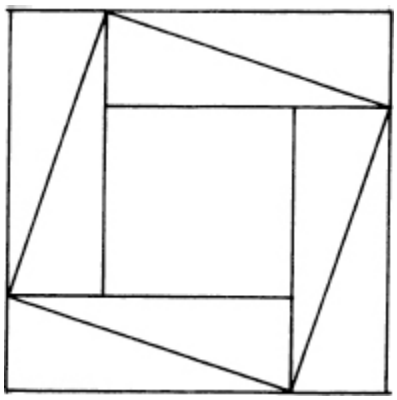
a figura compunha-se de um quadrado grande, um quadrado pequeno e o restante do gnômon. Ele estava em busca de uma ou duas linhas de construção, algo que fizesse a descoberta fundamental sair do esconderijo. Um dia, desenhou uma linha assim num dos braços do gnômon:



Gnômon com uma diagonal

— Foi o momento do heureca! — prosseguiu Pygonopolis. — Esse foi o auge da matemática grega, e um momento divino para Pitágoras. Ele percebeu que o braço do gnômon recém-dividido em dois continha um triângulo retângulo. Seria desse triângulo retângulo que brotaria seu teorema? Seu lado menor pertencia ao quadrado do canto do gnômon. O lado maior, em ângulo reto com o menor, pertencia ao quadrado abarcado pelo gnômon original. E a hipotenusa… a que pertencia ela? Pitágoras teve a ousadia e o discernimento de descobrir um novo diagrama, um diagrama em que o braço do gnômon era distribuído pelo quadrado grande, assim.”

Pygonopolis desenhou um novo quadrado como o anterior, mas distribuindo quatro cópias do braço do gnômon pelo quadrado. Nesse processo, surgiu um novo quadrado inclinado dentro do antigo. — Isso! — exclamou ele, batendo com o giz na figura: — Era ISSO!



Três quadrados

Eu me lembrava de haver lido sobre essa construção, mas só então suas qualidades maravilhosas se evidenciaram. O quadrado inclinado, produzido pela construção, era simplesmente o quadrado da hipotenusa do triângulo retângulo que havia no braço do gnômon. Pygonopolis já havia assinalado os quadrados dos outros dois lados, um no canto do gnômon original, outro abarcado por ele.

Era fácil enxergar os três quadrados que entravam na relação, mas, qual era a relação? No novo diagrama, a área do quadrado grande, que abrangia tudo, tinha sido dividida em duas partes, ou seja, o quadrado inclinado e, imediatamente fora dele, quatro cópias do triângulo retângulo. Se as quatro cópias fossem retiradas, restaria apenas o quadrado inclinado. No diagrama anterior, seria possível retirar os dois braços do gnômon, cada qual correspondendo a dois dos triângulos retângulos. Em outras palavras, os dois diagramas seccionavam o quadrado original de duas maneiras diferentes. Daí se deduzia que, se fosse subtraído o equivalente a quatro dos triângulos retângulos de cada um deles, restaria exatamente a mesma área. A área remanescente na primeira figura era, simplesmente, a soma das outras duas — ou seja, dos quadrados dos dois lados do triângulo retângulo. A área remanescente na segunda figura era, simplesmente, a do quadrado inclinado, o quadrado da hipotenusa do triângulo retângulo.

— É lindo! — deixei escapar, num impulso. — Eu nunca havia percebido plenamente…

— Agora você entende porque foi que Pitágoras sacrificou imediatamente outro boi.

— Eu nunca me dera conta do quanto se sabia sobre essa descoberta — disse-lhe. — Isso foi publicado em algum lugar?

— Ah — suspirou Pygonopolis —, não exatamente. A demonstração que acabei de esboçar é uma das que são tradicionalmente imputadas a Pitágoras, e é provável que tenha sido sua demonstração. Mas a sequência dos acontecimentos que levaram a ela, a exploração dos atomógonos, a longa pausa para reflexão antes da descoberta fundamental, tudo isso são especulações minhas. A longa pausa, por exemplo, certamente deve ter acontecido. Qualquer um levaria um certo tempo para perceber que o quadrado grande, o que foi seccionado de duas maneiras diferentes, não estava fadado a desempenhar o papel de um dos quadrados que entravam na relação, como desempenhou em sua explicação dos atomógonos. No cômputo geral, apenas acho que essa foi a sequência mais natural de acontecimentos na concatenação de descobertas que levou ao teorema de Pitágoras.

Pygonopolis pareceu entristecer-se, como se fosse perseguido por uma lembrança.

— Algum problema?

— Aos 53 anos de idade — disse ele —, Pitágoras entrou em choque com o governante local, Polícrates. Essa é uma questão cercada de mistério, mas imagino que Pitágoras já houvesse dado início à atividade quase religiosa que hoje conhecemos como Escola Pitagórica. Talvez Polícrates se sentisse ameaçado pela crescente influência dele. Seja como for, Pitágoras emigrou para Crotona, uma colônia grega no sul da Itália. Ali fundou essa escola, que foi mais do que uma escola. A Escola Pitagórica, uma ordem secreta que incluía mulheres, ensinava que o número era a base da realidade e exigia que seus membros jurassem segredo a respeito de qualquer descoberta, antiga ou nova. Por exemplo, a descoberta dos números irracionais ou incomensuráveis foi mantida em segredo até um dos membros da escola deixar que ela vazasse. Foi castigado, segundo dizem, afogando-se acidentalmente num naufrágio.

— Mais do que isso — continuou Pygonopolis —, a escola tinha uma orientação claramente espiritualista. Eles se vestiam de branco e praticavam o ascetismo. Tinham estrelas de cinco pontas tatuadas nas palmas das mãos. A escola acabou ganhando fama por sua doutrina da transmigração das almas, um elemento que talvez tenha sido retirado da antiga doutrina hindu. O corpo era o templo da alma, e esta renasceria num animal, se decaísse num estado animalesco de autogratificação. Se atingisse a perfeição, entretanto, escaparia para sempre do ciclo interminável das reencarnações,

indo enfim residir com os deuses. Visto que alguns animais, por conseguinte, eram seres humanos reencarnados, a escola proibia que se comesse carne de animais.

— Eles foram os primeiros vegetarianos? — perguntei.

— Bem, é provável que não comessem mamíferos, pelo menos. Os pitagóricos também ensinavam a ligação entre todas as coisas, diziam que a mente humana estava ligada ao próprio cosmo. Isso os preparava para a vida entre os deuses.

A ideia de uma ligação entre a mente e o cosmo fez-me lembrar uma de minhas perguntas.

— Presumindo que tudo o que você disse seja verdade — perguntei —, como se reflete a aventura pitagórica nas questões que discutimos ontem à noite? Por exemplo, por que é que nós, que vivemos numa cultura completamente diferente da que prevalecia na antiga Grécia, achamos a demonstração tão convincente quanto Pitágoras a considerou? Segundo, será que Pitágoras criou esse teorema, ou será que o descobriu? Terceiro, como entra o holos nisso tudo?

— Certamente — disse Pygonopolis —, julgamos essa demonstração convincente, hoje em dia, porque ela é verdadeira. Nossa cultura pode ser diferente, mas o conteúdo efetivo do teorema de Pitágoras é o que eu chamaria de *transcultural*, ou seja, é algo que está além ou acima da cultura. Entendo que você se sinta compelido a fazer essas perguntas, mas você deve lembrar-se de minha analogia da roda, que é um bom exemplo do conteúdo transcultural. A roda faz o que faz, mais ou menos com a mesma adequação, em todas as culturas que dispõem dela.

— Para ser muito rigoroso — prosseguiu ele —, eu diria que o uso de pontos para representar os números, e até o uso da língua grega para expressar a demonstração, são elementos culturais, mas o mesmo acontece hoje em dia. Olhe para qualquer publicação matemática. As demonstrações podem ser escritas em português ou em chinês, a notação pode diferir um pouco de um autor para outro, mas todo o mundo sabe o que as palavras e a notação querem dizer. Em suma, há uma espécie de processo de tradução nos bastidores, pelo qual os trabalhos de dois autores que porventura descubram um mesmo teorema podem ser convertidos um no outro, tornam-se quase intercambiáveis, através do processo de tradução.

— Deixando de lado a influência cultural — insisti —, Pitágoras descobriu ou criou seu teorema?

— Ele o descobriu, é claro — respondeu Pygonopolis. — Tenha a certeza de que, se Pitágoras não tivesse descoberto o famoso teorema que leva seu nome, outra pessoa o faria. Nesse sentido, o teorema era preexistente. Santo Deus! O que mais se pode dizer? Se Cristóvão Colombo não houvesse navegado para o Ocidente em 1492, uma outra pessoa o teria feito, em 1496 ou mais tarde. Na verdade, os vikings já haviam descoberto a América do Norte muito antes de Colombo. A América do Norte era preexistente, num sentido que essencialmente não difere da preexistência do teorema de Pitágoras.

— Quanto à criação — prosseguiu Pygonopolis —, qual é a probabilidade de que dois pintores que não se conhecem venham a pintar a Mona Lisa? Zero, meu amigo, zero. *Isso* é criação! E essa história de influência da cultura na matemática! Hoje em dia, existe o modismo cultural da criatividade. Assim, existem matemáticos, embora ainda não sejam muitos, que querem ser vistos como criativos. Sem se darem conta de que já são criativos por descobrirem o caminho para os teoremas, eles insistem em ser uma espécie de artistas, sendo seus teoremas como obras de arte, por assim dizer.

— Mas isso parece bastante inofensivo, não é? — comentei.

— Nossa cultura atual inquieta-se cada vez mais com as restrições, sejam elas sob a forma de visões autoritárias ou de ideias absolutas, como Certo e Errado, com letras maiúsculas. E considera repulsivo o caráter impessoal da matemática. Por quê, não sei dizer. É importante ter algo de fora que nos desafie. É importante errar.

Pygonopolis estava bastante esbaforido e meio agitado. Sentouse, enquanto eu olhava pela janela. Depois, recomeçou a falar, dessa vez com muita calma.

— Deixe-me mostrar-lhe como o teorema de Pitágoras nos afeta hoje.

Levantou-se, foi até o quadro-negro e escreveu a seguinte fórmula:

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

— Aqui está Z, a hipotenusa de um triângulo retângulo, e aqui estão X e Y, os outros dois lados. Em qualquer sistema de coordenadas em que X e Y são as coordenadas de um ponto, essa fórmula nos permite calcular a

distância entre dois pontos. Alguns computadores fazem isso o tempo todo. Pense nos computadores de navegação dos aviões, navios e satélites, para não falar dos milhares de computadores em terra que calculam distâncias a todo momento. Eu me atreveria a dizer que a fórmula pitagórica é uma das mais largamente usadas no mundo de hoje. Também nisso há uma demonstração adicional de que o teorema é verdadeiro. Se não fosse, quantos aviões você acha que aterrissariam em segurança? Nenhum!

Uma coisa em que eu havia pensado na noite anterior, antes de pegar no sono, voltou-me à lembrança. — Por falar em computadores, ocorreu-me recentemente que ainda estamos vivendo num mundo pitagórico, no primeiro cosmo de inteiros e números racionais com que Pitágoras sonhou.

— É mesmo? — perguntou Pygonopolis, empertigando-se na cadeira.

— Num sentido prático — expliquei —, ainda estamos vivendo no mundo pitagórico dos números racionais. Nunca usamos realmente os irracionais, quando medimos ou calculamos coisas. Para começo de conversa, um número irracional tem um número infinito de dígitos, e nenhum computador tem uma memória infinita. Assim, somos obrigados a fazer uma aproximação de números irracionais, como a raiz quadrada de 2, usando um número racional como 1,4142, que é bastante próximo para fins práticos. Esse número é racional, é claro, porque é a razão de dois inteiros, 14.142 e 10.000.

— Imagine só! — disse Pygonopolis. — O mundo de Pitágoras é revivido nos computadores. Que ideia maravilhosa! Vou usá-la em meu próximo curso sobre a história da matemática grega.

Aquela deveria ser minha última noite em Atenas. Pygonopolis foi buscar-me no hotel e saímos para jantar uma comida grega tradicional. Um bom jantar sempre traz à tona o filósofo que existe em mim. Depois de bem alimentado e à vontade, que mais se pode fazer senão ponderar sobre o estado do cosmo — ou do holos, conforme o caso?

— Você quer ir ao holos comigo? — perguntou Pygonopolis, com ar reservado. — É muito fácil. Podemos ir agora mesmo.

Ele estava tomando *retsina*.[a] Iria fazer alguma bobagem?

— Para visitar o holos, você tem que presumir um sistema de axiomas. Não falamos dos axiomas, mas todos os matemáticos gregos percebiam, em graus variáveis, que havia um sistema de pressupostos ou axiomas subjacente a seu trabalho. Na época de Euclides, algumas centenas de anos

depois de Pitágoras, o método axiomático estava bem estabelecido. Isso significava fundamentar solidamente todos os teoremas em axiomas, ou noutros teoremas assim fundamentados. Euclides fez uma lista de axiomas ou postulados com base na qual é possível derivar todos os teoremas de seus *Elementos de geometria*. Eles se referem à geometria, é claro, mas esse enigma incorpora um outro conjunto de axiomas, que é muito mais simples.

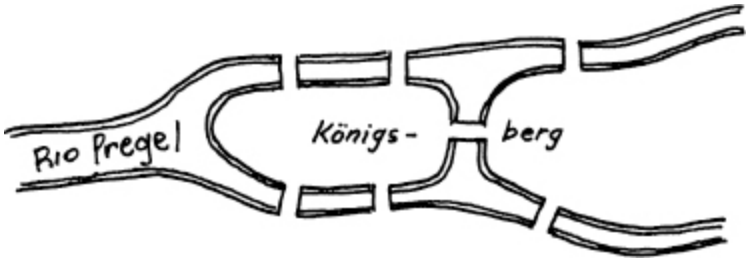
— Seja como for — prosseguiu Pygonopolis —, uma vez chegando ao holos, uma vez tendo adotado um conjunto de axiomas, você poderá se movimentar, por assim dizer. Descobrirá rapidamente que existem lugares a que pode ir e lugares a que não pode ir. Baterá com a cabeça numa coisa mais dura do que a pedra, numa coisa muito permanente, que sempre existiu e sempre existirá.

— O que você quer dizer com movimentar-se, exatamente? — perguntei.

— Você começa pelos axiomas, e então sai em busca de verdades baseadas neles. Se pensar em alguma coisa que possa ser verdadeira, poderá tentar deduzi-la dos axiomas. A impossibilidade de fazer isso talvez se deva a suas próprias limitações, é claro, mas também pode ser devida ao próprio holos. O que você julga ser verdade talvez não o seja. Por outro lado, talvez você consiga deduzir alguma coisa dos axiomas, algo que será verdadeiro, portanto. Nesse caso, você se terá deslocado, por assim dizer, dos axiomas para um novo campo.

— Não é muito fácil — prosseguiu Pygonopolis — produzir um sistema axiomático simples que demonstre esses princípios. Na verdade, tenho que recorrer a um quebra-cabeça para demonstrar essa ideia.

Pygonopolis procurou uma caneta no bolso do paletó. Pegando um dos dispendiosos guardanapos de linho, rabiscou nele o seguinte mapa:



As pontes de Königsberg

Enquanto desenhava, ia resmungando baixinho: — As pessoas riem dos quebra-cabeças. Se eu tentar usar um quebra-cabeça para esclarecer alguma

coisa sobre a matemática, vão achar que estou brincando. Muitas vezes, no entanto, seriíssimos sistemas matemáticos revelam ser quebra-cabeças, e vice-versa. Este belo enigmazinho, por exemplo, intrigou o grande matemático alemão Leonhard Euler. Ao resolvê-lo, ele foi levado a formular em linhas gerais um novo tipo de matemática, que hoje chamamos de “topologia”.

— Aqui temos — continuou — a antiga cidade de Königsberg, que ocupa as duas margens do rio Pregel, e mais uma ilha e uma península no meio. Sete pontes ligavam as várias partes da cidade. Uma diversão dos bons cidadãos de Königsberg, ao fazerem seus passeios de domingo, era descobrir um percurso que cruzasse cada uma das pontes uma vez só.

— Antes de examinarmos o sistema axiomático subjacente — disse Pygonopolis —, preciso fazer uma visita ao toalete. Enquanto vou até lá, você pode tentar resolver o quebra-cabeça.

— O que devo fazer? — perguntei, meio confuso com o jogo que ele pusera diante de mim.

— Apenas finja que você é um cidadão de Königsberg. Comece por onde quiser e use a caneta para traçar sua rota em qualquer lugar do mapa, exceto na água. Trace uma rota que o faça passar por cada uma das pontes uma única vez.

— Tenho que terminar onde comecei? — perguntei.

— Essa é uma boa pergunta — respondeu Pygonopolis, apoiando-se ora num pé, ora no outro, enquanto refletia por um momento. — Na verdade, vou deixá-lo começar onde quiser e terminar onde quiser, mas um passeio verdadeiro começa e termina no mesmo lugar.

Enquanto cruzava o restaurante, ele gritou para mim, atraindo um bom número de olhares das outras mesas: — E não se esqueça de que você tem que atravessar cada ponte uma vez!

Peguei o guardanapo com um suspiro. Eu não tinha caneta, de modo que tentei traçar uma rota com o dedo. Embora fracassassem as minhas primeiras tentativas de descobrir um caminho que passasse uma vez por todas as pontes, atribuí isso ao esquecimento dos lugares onde eu já havia estado. Depois de alguns minutos, porém, eu já estava perito em me lembrar do caminho.

— E então, terminou? — perguntou Pygonopolis, já de volta.

— Francamente, nunca fui muito bom em quebra-cabeças — respondi, sentindo-me um tantinho irritado.

— Ha, ha, ha. Não importa se você é bom em quebra-cabeças. Eu poderia ficar no banheiro até o Egeu inteiro escoar pelo ralo, e você nunca encontraria uma solução!

— Suponho que você possa provar isso — respondi, incrédulo.

— E posso mesmo. Primeiro, no entanto, deixe-me explicar-lhe o sistema axiomático. Ele diz respeito a pontos e linhas, quase como a geometria, mas as linhas podem ser sinuosas como você quiser, já que seu papel principal é ligar pontos.

Pygonopolis virou o guardanapo e escreveu os seguintes axiomas:

1. Um grafo compõe-se de um número finito de pontos e linhas.

2. Toda linha de um grafo une dois pontos.

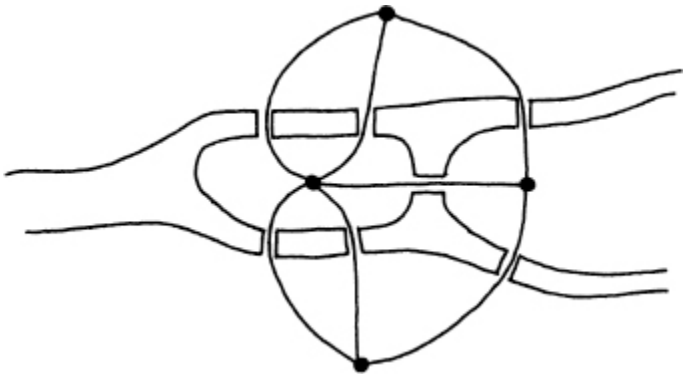
— Esses axiomas — disse — expressam as normas básicas de uma coisa chamada “grafo”. Ele se compõe de pontos e linhas, sendo os pontos o que chamamos de “elementos primários”. Eles não são definidos, mas podem ser interpretados da maneira normal. A linha, por outro lado, é definida em termos de pontos. É uma coisa que une dois pontos. Eu poderia ser mais preciso, dizendo que a linha consiste num par de pontos. Seja como for, esses axiomas nos colocam no limiar de um universo virtual de grafos. Nossa tarefa, como matemáticos, é explorar verdades sobre eles. Nesse processo, podemos descobrir estruturas interessantes, para as quais inventamos nomes especiais. Fazemos definições, como farei dentro em pouco.

Olhei para os axiomas e, em seguida, desvirei o guardanapo. Não conseguia ver muita ligação entre os axiomas e o mapa, exceto pelo fato de que Pygonopolis havia usado linhas para desenhá-lo. Além disso, não consegui ver nenhum ponto de que pudesse falar.

— Desculpe — disse-lhe —, mas não entendo muito bem o que os axiomas têm a ver com o mapa de Königsberg.

— Essa foi a genialidade de Euler. Veja isto.

Pygonopolis pegou o guardanapo e desenhou um ponto no meio de cada um dos quatro pedaços de terra. Depois, desenhou para cada ponte uma linha que a atravessava de um pedaço de terra a outro, ligando seus respectivos pontos.



As pontes com o grafo superposto

— Observe como essa pequena figura vai ao âmago do problema. Qualquer percurso de Königsberg que você queira fazer pode ser reduzido a um percurso equivalente no diagrama. Você pode fazer quantos meandros quiser num percurso real, mas, uma vez que esteja num determinado terreno, estará efetivamente no ponto que o representa. Qualquer percurso que você faça com sua caneta poderá ser reduzido a uma sequência de linhas nesse diagrama.

— Pois bem — prosseguiu ele —, ficou imediatamente claro para Euler, depois de ele haver desenhado esse pequeno grafo, porque os bons cidadãos de Königsberg tinham tanta dificuldade de percorrer as sete pontes. Olhe aqui: se eu estiver percorrendo a cidade e chegar a um ponto por uma linha, terei que deixá-lo por outra. A rigor, num trajeto adequado, ou seja, sem se repetir pontes, devo ter um número par de linhas em cada ponto. E olhe aqui: todos os quatro pontos têm um número ímpar de linhas ligadas a eles. *Ergo*, não existe o trajeto desejado. *Ergo*, o quebra-cabeça não tem solução.

— Ora, como você já sabe — continuou Pygonopolis —, esse diagrama particular de Euler é um exemplo de um grafo. Ele satisfaz os axiomas do grafo, como você pode verificar rapidamente. Compõe-se de pontos e linhas e cada uma das linhas liga dois pontos. Como matemático, talvez você quisesse explorar o holos, fazendo perguntas sobre os grafos e procurando respostas sob a forma de teoremas.

— Digamos, por exemplo — prosseguiu —, que você ache que todo grafo é euleriano. Primeiro, você define o que pretende dizer isso.

Pygonopolis tornou a virar o guardanapo e escreveu:

Um grafo é euleriano se existe uma sequência de linhas que comece e acabe no mesmo ponto, na qual as linhas consecutivas têm um ponto em comum e aparecem na sequência somente uma vez.

— Se, como matemático — continuou —, você achar que está na trilha de uma verdade geral, você fará uma conjectura, uma espécie de hipótese matemática. Assim:

Conjectura: Todo grafo é euleriano.

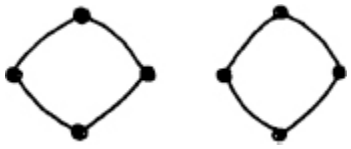
— Você pode tentar provar sua conjectura — seguiu dizendo Pygonopolis —, fazendo dela um teorema, mas pode ser que fracasse, como certamente acontecerá neste caso. Também pode pensar num contraexemplo, como o diagraminha de Euler. Foi isso, como você deve estar lembrado, que aconteceu com Pitágoras. Ele achava que todos os comprimentos eram comensuráveis, até Tales lhe mostrar a figura egípcia que se revelou um contraexemplo. No nosso caso, o diagrama da cidade atende precisamente à mesma finalidade. A conjectura não é verdadeira em relação a todos os grafos, porque não é verdadeira a respeito do diagrama que Euler construiu. O holos se manifestou.

— Mas — disse ainda Pygonopolis —, digamos que você tenha uma outra ideia. Você observa que a impossibilidade para o diagrama desenhado ou um grafo euleriano deveu-se a pontos onde se encontra um número ímpar de linhas. Daí você se perguntar se a conjectura seria verdadeira, caso ela se restringisse a grafos em que em cada ponto se encontrasse um número par de linhas:

Conjectura: Se em todos os pontos de um grafo se encontrar um número par de linhas, o grafo será euleriano.

— Isso deve resolver a questão, com certeza — disse eu. — Afinal, toda vez que se chega num ponto num grafo como esse, é certo que se consegue sair dele, a não ser que se trate do ponto inicial.

— Você poderia experimentar essa abordagem — respondeu Pygonopolis —, enunciando-a como uma tese formal, mas tornaria a fracassar. Eis um contraexemplo — acrescentou, e desenhou um novo grafo, no qual em todos os pontos se encontrava um número par de linhas, mas que obviamente não era euleriano.



Um contraexemplo

Ele havia despertado meu interesse. Sugeri que, se o grafo fosse conexo, talvez a conjectura funcionasse. Assim, Pygonopolis tornou a escrever no guardanapo:

Conjectura: Se em todos os pontos de um grafo conexo se encontrar um número par de linhas, o grafo será euleriano.

— É claro que temos de esclarecer o que pretendemos dizer com "conexo" — acrescentou. — Proponho a seguinte definição:

Definição: Um grafo G é conexo quando, para qualquer subconjunto de seus pontos e linhas que não corresponda à totalidade de G, existe uma linha de G não incluída no subconjunto que se encontra com algum ponto do subconjunto.

Essa definição pareceu satisfazer nossas ideias intuitivas do que deveria significar "ser conexo", mas, seria adequada à tarefa?

— Acho que tenho uma demonstração! — exclamou Pygonopolis. Abriu o guardanapo num pedaço em branco e escreveu:

Teorema: Quando em todos os pontos de um grafo conexo se encontra com um número par de linhas, o grafo é euleriano.

Demonstração: É sempre possível construir, num grafo assim, uma sequência de pontos e linhas, sem repeti-las, começando e terminando num mesmo ponto, da seguinte maneira: Começa-se num ponto qualquer do grafo e se escolhe qualquer linha que se encontre com ele. Restará então, um número ímpar de linhas que se encontram com este ponto de partida. Em geral, toda vez que uma nova linha é acrescentada à sequência (inclusive a primeira), surgem dois casos:

1. O novo ponto não é o início da sequência: Nesse caso, como para cada linha que chega a um ponto, o ponto possui uma linha que sai dele, resta pelo menos uma linha que pode ser acrescentada à sequência, ou seja, que ainda não foi "usada". Que seja acrescentada à sequência. Fazendo isto sucessivamente com certeza se chega no ponto de partida, já que o grafo tem um número finito de pontos e linhas.

2. O novo ponto é o primeiro da sequência. Nesse caso, ou a sequência está completa, ou existem linhas que ainda não foram incluídas na sequência. Neste último caso, como o grafo é conexo, deve haver

uma linha que ainda não está na sequência, mas que se encontra com um dos pontos dela. Afinal, a sequência, tal como construída até agora, é um subconjunto dos pontos e linhas do grafo. Construamos uma nova sequência, partindo desse ponto e procedendo da mesma maneira, incluindo linhas não usadas ainda. Pelos argumentos anteriores, a nova sequência deverá acabar voltando a seu ponto de partida, porque todos os pontos da rede continuam a se encontrar com um número par de linhas que não estão na primeira sequência. Conectemos a nova sequência na anterior, no ponto em questão, fazendo uma nova sequência maior. Se a sequência recém-aumentada não for completa, haverá ainda uma linha tocando num ponto da nova sequência que não estará na sequência. Continuemos a juntar sequências dessa maneira, até que não reste nenhuma linha a acrescentar. A sequência resultante deverá ser o trajeto desejado, começando e terminando num mesmo ponto, passando uma só vez por cada linha. Ou seja, o grafo é euleriano.

Pygonopolis olhou para o relógio: — Pelos deuses! Eu o retive por tempo demais. Você foi muito paciente comigo. Afinal, sei que boa parte disto é do tempo do onça, como diriam vocês.

Nossa viagem ao holos estava encerrada. Pygonopolis fez um sinal ao garçom e me disse: — Meu amigo, eu lhe expus tudo o que penso sobre a antiga matemática grega, sobre Pitágoras e sobre o holos. Não sei se respondi tão bem a suas perguntas quanto você gostaria, mas tentei. Minha última palavra sobre o holos é a seguinte: você não tem que acreditar que ele realmente existe de alguma maneira, mas nunca encontrará um contraexemplo dessa crença.

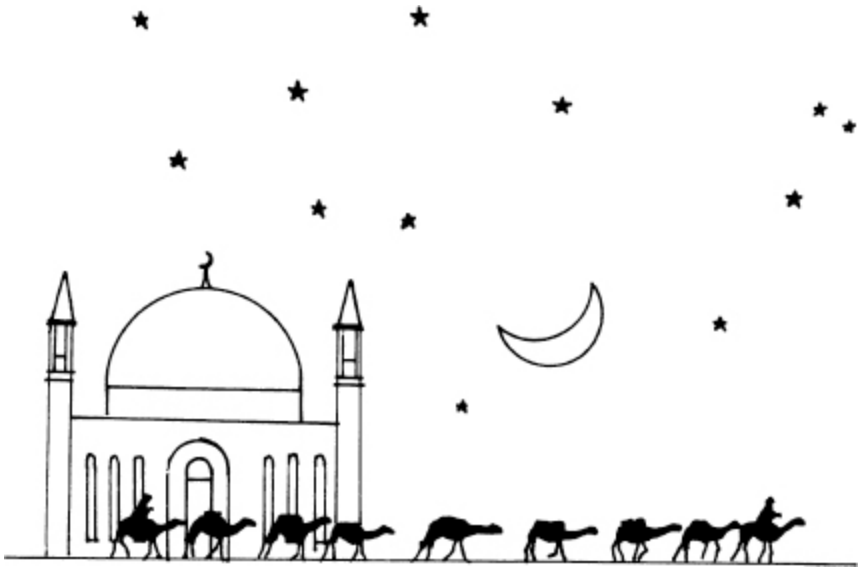
Pygonopolis saiu da mesa para pagar a conta e buscar o carro. Olhei para o guardanapo amarfanhado sobre a mesa, estragado pelos diagramas rabiscados a caneta. Apanhei-o e o exibi ao garçom, que fez um ar desolado. — Tome — eu disse, meio sem jeito, e lhe entreguei 2.000 dracmas, que esperei serem uma compensação adequada.

Como souvenir, o guardanapo bem que valeu o dinheiro.

a Vinho grego aromatizado com uma resina de pinheiro. (N.T.)

PARTE II

O MUNDO SUPERIOR



CAPÍTULO 3

AL JABR

Ácaba, Jordânia, 24 de junho de 1995

No outro dia de minha programação estafante, segui viagem num avião de Atenas para Amã, com a cabeça inundada de ideias sobre o holos, a geometria e os números. Já na Jordânia, tomei outro avião para Ácaba, no extremo norte do mar Vermelho. Ao chegar ao minúsculo aeroporto, encontrei meu anfitrião assim que passei pelo posto da alfândega. Era Jusuf al-Flayli, um astrônomo egípcio que tinha uma residência de verão nas colinas que se elevam sobre o porto. Al-Flayli tinha feito um estudo da astronomia e da matemática islâmicas primitivas. Era um homem magro e nervoso, propenso a citações frequentes, e tinha um jeito intenso mas contido.

— Bem-vindo a Ácaba, professor Dewdney. Sou o professor al-Flayli. Espero que me chame de Jusuf. Meu filho Ahmed levaria a sua bagagem, mas foi estacionar o carro e não consigo ver onde está.

Estávamos parados no terminal, tentando avistar o filho dele, quando fomos envolvidos por uma nuvem de poeira, levantada pelas hélices de um avião. Alguém pegou minhas malas, gritando em meu ouvido: — Sim, *Sayid*. Vá andando. Chegamos logo.

Quando a poeira baixou, percebi que um menino estava carregando minha bagagem. Sorria para mim, com ar ansioso.

— Deixe-o carregá-la — disse al-Flayli. — Não é longe, e ele precisa do dinheiro. Alá protege os piedosos.

Obviamente, aquele não era Ahmed.

Voltamos para o terminal, onde encontramos o filho de al-Flayli no pequeno saguão, inspecionando folhetos. Ainda adolescente, a princípio Ahmed parecia uma cópia carbono do pai, mas então deu-me um sorriso

luminoso, ao sermos apresentados. Nós o acompanhamos até a estrada que levava ao aeroporto, onde encontramos um Land Rover espremido como uma cunha entre outros dois carros. Só pudemos pôr a bagagem na mala depois de Ahmed repetir nada menos de umas vinte manobras para frente e para trás, para libertar o veículo de sua prisão. Eu achava que seria impossível. O pequeno carregador foi-se embora, correndo e gritando, segurando na mão os dinares que lhe dei. O rosto de al-Flayli iluminou-se por um breve momento enquanto entramos no Land Rover.

Sentei-me ao lado de Ahmed, que estava ao volante. Cruzamos a avenida do aeroporto até uma autoestrada e, de lá, viramos em direção a Ácaba. Eu havia ansiado por ver o famoso porto, mas a estrada apenas contornava sua extremidade norte, passando por numerosos prédios de apartamentos e, mais adiante, por uma vasta plantação de tamareiras. Entramos noutra estrada, que levava para o norte. A civilização foi-se reduzindo a algumas casas isoladas — baixas, brancas e sem janelas — e, em seguida, à vegetação rasteira do deserto. Al-Flayli estava no banco traseiro, de onde apontou para uma colina à direita. Era lá que ficava sua casa.

Ahmed pegou minha bagagem enquanto al-Flayli me conduzia pela casa, que tinha o tamanho e a forma aproximados de um bangalô dos nossos bairros residenciais. Uma varanda ampla abria-se para o sul. O sol poente enfeitava de ouro as montanhas a oeste, abençoando de leve os topos dos minaretes de Ácaba. O mar tinha a cor da água-marinha e sua linha costeira descrevia uma vasta parábola em cujo vértice ficava o porto, logo abaixo de nós.

— Por favor. Você deve estar cansado — disse al-Flayli, fazendo um gesto em direção a um sofá na varanda. Mal ele disse isso, senti-me percorrer por uma onda de cansaço e me sentei.

Ahmed trouxe uma mesa de madeira requintadamente entalhada, com incrustações de marfim. Sobre ela estavam várias tigelas com frutas e uma bandeja com fatias de pão árabe, azeitonas, geleia de damasco e pasta de grão-de-bico.

— Se não estiver cansado demais, espero que você nos brinde com um relato de suas viagens e de sua busca do significado da matemática — disse al-Flayli. Então, dirigindo-se a Ahmed em voz mais baixa, sussurrou: — Vá chamar sua mãe.

Percebendo uma certa dramaticidade na maneira como al-Flayli havia preparado as coisas, comecei da maneira mais dramática que podia. —

Acabo de chegar da antiga cidade de Mileto, no mar Egeu. Lá conheci o professor Pygonopolis, que me mostrou, numa tarde, as raízes da matemática grega, tanto na cultura deles quanto em algo além da cultura…

Amina, a mulher de al-Flayli, acomodou-se numa das cadeiras. A cada frase que eu dizia, ela sorria e balançava a cabeça, num gesto encorajador. Contei-lhes a história de Pitágoras e de sua crença inicial em que o universo era regido por inteiros e suas razões. Falei-lhes da figura desastrosa que chegara do Egito (com o que al-Flayli sorriu) e, em seguida, do teorema de Pitágoras. Al-Flayli ficou extasiado durante toda a narrativa. Seu filho Ahmed olhava de mim para o pai e novamente para mim, com os olhos arregalados de assombro. Concluí falando do holos.

— Francamente, nunca ouvi essa palavra antes — disse al-Flayli. — Será que é alguma coisa que seu amigo grego inventou?

Meio surpreso com a perspicácia de al-Flayli, tive que admitir que sim.

— Bem, pode ser que ele tenha descoberto algo, de qualquer modo. Afinal, precisamos de nomes para as coisas!

O sol desaparecia na linha do horizonte, a oeste, e a noite caía sobre os vales ao redor de Ácaba como uma maré enchente de escuridão. O ar ficou frio. A família al-Flayli pediu licença e se retirou para fazer suas orações vespertinas, enquanto eu me sentava na sala de estar pequena, mas suntuosamente mobiliada, divertindo-me em examinar os títulos dos livros em suas prateleiras. Muitos estavam em árabe, mas também havia muitos em inglês, inclusive alguns que pareciam traduções, com títulos como *O jardim murado da verdade*, *O parlamento dos pássaros*, *Majnun*, *Laila* e assim por diante.

Logo depois das orações, sentamo-nos para um lauto jantar, com diversas iguarias servidas num número igualmente grande de tigelas e pratos. Comi até não poder mais, e Amina continuava a insistir para que eu continuasse. Por fim, cambaleamos até a sala de estar, para nos recostarmos em almofadas macias.

— Agora, portanto, você deve discorrer mais sobre sua correspondência e suas mensagens do correio eletrônico — disse al-Flayli. — Por favor, diga-me como acha que podemos ajudar em sua busca.

Ele falava muito baixo, quase com suavidade, mas havia algo em suas maneiras que era como uma couraça, de modo que falei com cuidado.

— Eu me pergunto o que você poderia dizer-me sobre a contribuição árabe para a matemática, e sobre como e até que ponto ela foi influenciada pela cultura. Mas também gostaria de ouvir sua opinião sobre o componente não cultural ou transcultural, como o chamou o professor Pygonopolis — sobre o que quer que haja na matemática que possamos dizer que se originou fora dela. A matemática é inventada ou é descoberta, ou será que é uma combinação das duas coisas? E, na medida em que seja descoberta, será que isso explica o que já se chamou de sua "eficiência absurda" como descrição do mundo? Permita-me esclarecer: se a matemática tem uma existência anterior, será que ela pode…

— Muito bem. Já entendi. Aí está você, procurando aproximar-se furtivamente do que chamou de holos, mas muito tímido para mencioná-lo, como alguém que não se atrevesse a acreditar numa coisa que é boa demais para ser verdade. Bem, presumo que você, ou todos nós, aliás, tenhamos motivos para desconfiar dessa situação. Mas, deixe-me abordar essas questões à medida que elas forem surgindo na historinha que lhe posso contar sobre o desenvolvimento da matemática no Oriente Médio, desde o século X do calendário cristão até os séculos XV e XVI. Na verdade, devo lembrar-lhe que o império islâmico floresceu e se manteve desde o século VII até o século XVI, detendo o controle durante mais do dobro do tempo de dominação do Ocidente cristão, desde o Renascimento até os dias atuais. Nesse intervalo de tempo, nesses 1.200 anos, houve uma enorme acumulação de conhecimentos científicos, tanto matemáticos quanto físicos. Em minha própria profissão, a astronomia, houve um progresso enorme, talvez o maior deles, mas todas as nossas realizações foram coroadas por um erro, um erro de percepção herdado dos gregos, mas que era, na verdade, comum a todos os povos da Terra.

Nesse ponto, Ahmed diminuiu a luz e al-Flayli pôs uma fita de música árabe para tocar. O som de alaúdes e arrabis envolveu suas palavras, evocando uma atmosfera de tempos idos e distantes.

— A história da matemática nesta parte do mundo tem suas raízes na Babilônia, na Índia e no Egito, tanto sob os faraós quanto, mais tarde, sob os ptolemaicos. Mas ela floresceu primeiro nos jardins intelectuais de Bagdá, nos primórdios do império islâmico. Isso foi no século IX, durante o reinado do califa al-Ma'mun.

— Em menos de dois séculos, de 620 a 800 d.C. — continuou al-Flayli —, o Islã havia passado de uma revelação em Meca a uma comunidade

religiosa que se estendia desde a Espanha, no Ocidente, até a Pérsia, no Oriente. Nesse processo, ele se havia efetivamente transformado num império. Tinha ministros, diplomatas e um vasto serviço público. A paz dentro de suas fronteiras e a riqueza de suas terras davam oportunidades criativas a governantes como al-Ma’mun. Sob certos aspectos, al-Ma’mun era um homem rígido e intolerante, mas valorizava o conhecimento e a sabedoria acima de tudo. Mandou observadores à procura dos homens mais eminentes e sábios, dentro ou fora de suas fronteiras, para que fossem juntar-se a ele no que o califa chamava de “Bayt al Hiqma”, ou Casa da Sabedoria.

— Tratava-se — prosseguiu al-Flayli — de nada menos do que uma escola de pensamento, uma universidade livre. Com efeito, os estudiosos convidados recebiam bolsas em caráter permanente e tinham acesso a toda e qualquer facilidade que al-Ma'mun pudesse oferecer. Ele patrocinou a tradução, para o árabe, de obras gregas como os *Elementos de geometria*, de Euclides, *O homem que calculava na areia*, de Arquimedes, a *República*, de Platão, e o *Almagesto*, de Ptolomeu, num total de centenas de obras. Também foi preciso traduzir o *Siddhanta*, ou as "coletâneas" dos cientistas indianos Brahmagupta e Aryabhata. Os novos livros foram avidamente lidos, copiados e distribuídos, sempre surgindo livros novos. Al-Ma'mun mandou construir uma grande biblioteca, onde colecionava todos os documentos vindos dos quatro cantos das terras islâmicas, assim como de outros lugares. Também financiou a construção de dois grandes observatórios e de vários outros de menor porte. Foi um período áureo, que se estendeu até depois da morte do califa. E nele surgiu o maior de todos os matemáticos árabes, al-Kuarizmi.

— Na verdade — acrescentou al-Flayli —, a rigor ele não era árabe, mas persa, oriundo da cidade de Kuarazm. Nascido com o nome de Muhammad ibn Musa, foi para Bagdá quando era um jovem estudioso, já familiarizado com muitos sistemas numéricos então utilizados no mundo inteiro, particularmente na Índia.

— A maioria deles — continuou al-Flayli — começava por I, II, III, como o alfabeto romano. Neste, os três primeiros números inteiros eram grafados simplesmente como traços para marcar. Depois deles repetiam-se marcas de tipos diferentes, em geral com símbolos separados para o 10 e o 100, ou, no sistema babilônico, o 60 e o 600. Se alguém quisesse somar

dois números nesses sistemas, seria mais simples contar nos dedos, e seria muito fácil errar. O comércio era um pesadelo, falando em termos relativos.

— Imagine a alegria de al-Kuarizmi — disse ainda al-Flayli — diante do sistema da Índia. Ele tinha 9 símbolos separados para os 9 primeiros números, e um novo número importantíssimo: o 0 [zero]. Além disso, os números se repetiam em dezenas, de maneira sumamente agradável. E, o que era mais importante, prestavam-se com facilidade a manipulações aritméticas. O segredo estava na nova notação posicional, um modo de usar as posições dos algarismos de um número para aumentar sua capacidade de expressão.

A exposição de al-Flayli continuou: — Nesse sistema, todos os números compunham-se de dígitos e cada dígito expressava um múltiplo de alguma potência de 10, como você sabe. É muito fácil presumir como um fato esse sistema numérico, pois nós, os árabes, convivemos com ele há mais de mil anos. Na verdade, porém, ele é quase mágico, se pararmos para pensar no assunto. O número 375, de fato, informa-nos sua própria composição, se olharmos não apenas para os algarismos, mas também para as posições que eles ocupam. Ele se compõe de 5 unidades, ou 5, 7 dezenas, ou 70, e 3 centenas, ou 300. É a soma desses números separados. Ora, um número que pode ser escrito como a soma das partes presta-se à adição e a outras operações, porque elas podem ser efetuadas com uma parte de cada vez. Para somar 375 com 193, por exemplo, bastava somar as unidades: 5 mais 3 é igual a 8, donde o primeiro algarismo era 8; depois, somavam-se as duas unidades seguintes: 7 mais 9 era igual a 16, isto é, 6 dezenas e uma centena, donde 6 era o segundo algarismo; o 1 era transportado para a posição seguinte, onde tínhamos que somar 3 mais 1. Isso dava 4, que, somados ao 1 transportado, davam 5, o terceiro e último dígito.

— Para trabalhar com esse sistema — continuou al-Flayli —, só era preciso conhecer as tábuas de somar dos primeiros dez dígitos, 0 a 9. O mesmo se aplicava à multiplicação. A notação posicional não funcionava sem o 0, aliás, porque, sem ele, os números desmoronariam. Poderíamos escrever 704 como 74 e tudo se transformaria no caos. O novo 0, ou *sifr*, como era conhecido em árabe, intrigava muita gente que entrava em contato com o sistema pela primeira vez. De que servia um número que não representava nada? Se não havia nada ali, não era necessário um número para contá-lo. Os piadistas da época tiveram com que se divertir.

— O contraste entre a nova notação e a antiga — concluiu alFlayli — me sugere uma observação quase trivial, mas profunda, que tanto se relaciona com sua pergunta a respeito da influência cultural quanto com a questão de a matemática ser criada ou descoberta. Por exemplo, al-Kuarizmi, como todas as outras pessoas que usavam o novo sistema numérico, também conhecia outros sistemas. Os mesmos números habitavam todos os sistemas, por assim dizer. O número romano XLII era uma antiga maneira de escrever o número representado no novo sistema por 42, por exemplo. Havia uma diferença superficial entre os dois, mas havia uma identidade subjacente. A diferença era cultural e inventada, mas a semelhança ia além da cultura. Eu afirmaria que ela era descoberta. O que mais se poderia dizer?

Senti que na semelhança estava a resposta à minha pergunta sobre a descoberta, de modo que fiz a pergunta mais direta que se poderia conceber: — Diga-me, por favor, o que é a semelhança? É possível eu compreender o número 42 diretamente, sem nenhum símbolo interveniente?

Al-Flayli olhou-me com um sorriso tristonho. — É claro que entendo o que você quer dizer, mas você está realmente sendo ambicioso demais. Experimente fazer isso com o número 2, ou, melhor ainda, com o 1. E pense nas palavras *um* e *dois*. Ou nas palavras árabes *wahid* e *ethnain*, que significam não apenas aproximadamente, mas precisamente as mesmas coisas. Ou imagine que você é um romano e diz *unum* e *duo*. Você pode sequer conceber diretamente esses pequenos números? Não creio que possa. Talvez você se iluda, achando que está percebendo o número 2 em sua forma pura, quando, na realidade, está imaginando 2 pontos, lado a lado.

— Você é capaz de explicar porque isso acontece? — perguntei.

— Não, não sou. Só sei dizer que só apreendemos os números através de nossa notação, de nossas palavras. Mas é tão impossível prescindirmos desses veículos quanto andarmos sem ter pés. Sabe, o número puro pertence ao que alguns matemáticos árabes chamavam de Mundo Superior. Deixe-me ler uma coisa para você.

Al-Flayli estendeu a mão para trás e, sem chegar propriamente a olhar, retirou um livro da estante que estava às suas costas. E disse:

— Esta é uma tradução de um livro antiquíssimo, chamado *As epístolas*, uma coletânea de ensaios sobre as artes e ciências. Foi anonimamente escrito por membros de uma escola chamada "Irmandade da Pureza", que

floresceu no século X, embora haja indícios de que eles foram atuantes durante toda a era islâmica.

Al-Flayli leu:

O SIGNIFICADO DO NÚMERO

A forma dos números na alma corresponde à forma dos seres na matéria (ou *hylé*). Ele [o número] é uma amostra do Mundo Superior e, através de seu conhecimento, o discípulo é levado às outras ciências matemáticas, à física e à metafísica. A ciência do número é a raiz das ciências, a base da sabedoria, a fonte do saber e o alicerce do sentido. É o primeiro elixir e a grande alquimia...

— Essa é a declaração mais clara que se pode obter sobre os números subjacentes — disse al-Flayli. — De acordo com essa visão, os números existem na alma ou na mente, mas sua origem é externa à mente. Não apenas os números residem, em certo sentido, nos objetos materiais, como também os números puros, não vinculados a nenhuma coisa específica, surgem no chamado Mundo Superior.

— Você não deve esquecer — lembrou al-Flayli — que todos esses estudiosos eram muçulmanos, e que situavam sua filosofia dentro das revelações do Alcorão. Em outras palavras, na medida em que se relaciona com a verdade das coisas, o Mundo Superior não é nada menos do que um aspecto de Deus. Alá tem outros

99 nomes, inclusive Al-Haq, ou a Verdade. Portanto, os números e todas as verdades pertinentes a eles fazem parte da Verdade de Deus, ou Al Haq. — Isso seria um lugar? — perguntei. — O que seria um lugar? — O Mundo Superior. Onde ele fica? Al-Flayli deu uma risada discreta, uma espécie de risinho baixo. — Bem, eu diria que fica muito perto do holos, se é que você sabe onde é isso.

— E quem eram os membros da Irmandade da Pureza? — perguntei, tentando um ângulo diferente.

— Estudiosos, como eu disse, mas estudiosos com raízes na Antiguidade. Na verdade, eram originários da Mesopotâmia, mas é possível que representassem uma cadeia contínua que remontava à irmandade pitagórica. Eis o que escreveu um deles:

> Sabei, irmão (que Deus vos ajude e a nós com Seu espírito), que Pitágoras foi um sábio singular, um harraneu que tinha grande interesse pelo estudo da ciência dos números e de sua origem, e que discutiu com grande minúcia suas propriedades, sua classificação e sua ordem. Ele costumava dizer: "O conhecimento dos números e de sua origem, a partir da unidade, é o conhecimento da unidade de Deus, Louvado Seja; e o conhecimento das propriedades dos números, de sua classificação e ordem, é o conhecimento dos seres criados pelo Louvado Criador. A ciência dos números está centrada na alma e requer pouca contemplação e pouca recordação para se tornar clara e conhecida, sem nenhuma comprovação."

E al-Flayli prosseguiu: — Bem, certamente Pitágoras foi anterior ao surgimento do islamismo, e no entanto, nós, muçulmanos, acreditamos que o islamismo sempre esteve aqui na Terra. Portanto, os Irmãos da Pureza provavelmente identificariam Zeus com Alá e diriam que os deuses, na verdade, eram aspectos da divindade ou emanações de Zeus. Seja como for, há fortes indícios de que a irmandade pitagórica sobreviveu pela era islâmica adentro, pouco se alterando, em sua orientação matemática e filosófica, em relação ao que o próprio Pitágoras havia ensinado.

— Voltando à realidade subjacente do número — acrescentou —, só posso dizer que havia uma espécie de identidade operacional. A prova disso era simples: quando um romano comprava XLII ovelhas de um pastor árabe, ele ficava perfeitamente satisfeito quando o árabe lhe entregava 42 ovelhas, pois esse era exatamente o número que o romano havia encomendado, nem mais nem menos. Esse exemplo humilde ilustra a realidade dos números no mundo. Ao mesmo tempo, o conceito de número na alma do romano e na do pastor era idêntico. E, por causa disso, qualquer um deles era capaz de reconhecer 42 ou XLII em qualquer outra coleção de objetos, fossem eles pedras, frutas ou outra coisa. Se você quer discutir a criação e a descoberta, só posso dizer o seguinte: a mente humana cria os números, no mesmo sentido em que cria as cores. No entanto, as cores que percebemos correspondem a algo de real fora da mente. Neste sentido, descobrimos números o tempo todo. Quantas páginas há neste livro? Quantas pessoas estão naquele ônibus? Quantos dinares estão no meu bolso?

— Por falar em dinares — continuou al-Flayli —, podemos dar um passo além dos números, entrando na aritmética, e examinar o novo sistema numérico introduzido por al-Kuarizmi na corte de alMa'mun. Quando as pessoas que aprenderam o novo sistema aritmético experimentaram usá-lo no dinheiro, as vantagens se evidenciaram de imediato. A soma de dois valores em dinheiro aparecia, quase que num passe de mágica, através da nova operação de adição, e correspondia invariavelmente ao total encontrado na marcação feita com entalhes. O dinheiro que saía de uma conta como pagamento podia ser facilmente subtraído dos livros. A previsão comercial simples tornou-se possível com a nova matemática. Os lucros potenciais das operações comerciais puderam ser prontamente calculados, através da multiplicação das mercadorias pelo preço, seguida pela subtração das despesas.

— Uma grande barreira foi rompida — disse ainda al-Flayli. — Os números ganharam um caráter fluente e foi possível pensar neles de outras maneiras.

Amina pediu licença para se retirar: — Eu os verei no café da manhã, antes de vocês três partirem para Wadi Rum.

Nesse ínterim, Ahmed fora chegando cada vez mais para frente no sofá e já estava prestes a cair. — Papai, conte a nosso amigo aquela história sobre a Casa da Sabedoria.

Al-Flayli sorriu, fez uma pausa e disse em sua voz baixa: — Contei a Ahmed essa história uma vez, e ele nunca mais parou de me implorar para repeti-la. Com a sua permissão, talvez seja chegado o momento de contá-la de novo.

— A Casa da Sabedoria — começou al-Flayli — era uma corte especial, mantida por al-Ma'mun. Não sabemos que forma ou tamanho tinha, mas imaginamos um grande salão, com tábuas de areia para calcular, um *scriptorium*, astrolábios, esferas armilares e outros instrumentos matemáticos e científicos dispostos em prateleiras, e um lugar especial em que os oradores podiam ganhar a atenção de seus pares. Lá se sentava al-Ma'mun, usando roupas de cores brilhantes e adornado com joias, aplaudindo os conceitos mais ousados e incentivando seus cientistas.

— Na corte — prosseguiu al-Flayli — estava Hunain ibn Ishaq, um estudioso e médico cristão que traduzia obras do grego. Lá estavam também os Banu Musa, ou filhos de Shakr ibn Musa, geômetras competentes que colecionaram e traduziram dezenas de manuscritos gregos. Lá estava ainda

al-Hallaj, famoso pela tradução dos *Elementos* de Euclides para o árabe. Habash al-Hasib compôs longas tabelas de observações astronômicas precisas e promoveu a ciência da trigonometria. Thabit ibn Qurra, o Astrônomo Real, dirigia o observatório de Bagdá e fez numerosas descobertas matemáticas. AlKindi e al-Farghani escreveram nessa época os primeiros tratados extensos sobre a astronomia. Al-Nairizi escreveu um comentário sobre o *Almagesto* de Ptolomeu e desenvolveu o astrolábio esférico. Havia também muitos poetas e artistas, inicialmente al-Mawsili e seu filho, músicos da Casa da Sabedoria.

— E como era essa Casa da Sabedoria? — indagou al-Flayli, ele mesmo respondendo: — Durante as sessões, o ocupante da tribuna podia expor a teoria da harmonia nas cordas vibratórias, e depois demonstrar as oitavas, as quintas e as terças no alaúde. Os músicos começavam e terminavam com esses acordes, elaborando entre eles passagens brilhantemente complexas. Todos os presentes eram arrebatados por essa mescla de beleza intelectual e estética.

— Depois — continuou —, um outro membro deve ter ocupado a tribuna: "Oh, Comandante dos Fiéis, Sombra da Vontade de Deus na Terra, Brilho do Olhar: eu gostaria de apresentar a Vossa Eminência e a esta distinta corte um recém-chegado de Kuarazm, na Baixa Mesopotâmia. Seu nome é Muhammad ibn Musa al-Kuarizmi, e ele tem algo a nos dizer sobre os números e sobre os sistemas com que eles podem ser feitos."

— A exposição de al-Kuarizmi sobre os números e seus sistemas impressionou o califa — acrescentou al-Flayli. — Outros membros da Casa da Sabedoria, matemáticos competentíssimos, apreenderam de imediato a nova ideia. Al-Kuarizmi tornou-se o novo favorito de al-Ma'mun. Mais tarde, talvez em menos de um ano, al-Kuarizmi concluiu um livro maravilhoso e o dedicou ao governante. Não vou torturá-lo com o árabe, mas, em português, o título seria *O livro completo dos cálculos por equilíbrio e oposição*. Em particular, entretanto, você precisa conhecer um pouquinho de árabe. A palavra *equilíbrio* é uma tradução do árabe *al jabr*, palavra que se transformou na *álgebra* atual.

— A natureza fundamental da álgebra — explicou al-Flayli — encontra-se na equação. Há um sinal de igual, real ou implícito, que liga duas expressões. As expressões podem parecer diferentes, ou ser descritas de maneiras diferentes, mas a relação entre elas, a igualdade, produz restrições poderosas. Pois bem, a palavra *oposição*, no título, refere-se a duas

expressões que parecem muito diferentes. No entanto, a palavra *equilíbrio* refere-se à igualdade entre elas. O equilíbrio só se mantém quando as duas expressões são tratadas exatamente da mesma maneira. O que se faz com uma tem que ser feito com a outra. Se subtrairmos um certo valor de uma das expressões, ou se a multiplicarmos por determinado valor, será preciso fazer exatamente a mesma coisa com a outra. Assim, se as expressões forem iguais antes de qualquer dessas operações, continuarão iguais depois delas.

Al-Flayli pegou uma caneta e um papel e nele escreveu a seguinte equação:

$$(1/12)\ X = X + 24$$

Em seguida, disse: — Esse é um exemplo do livro de al-Kuarizmi, escrito na notação moderna. Al-Kuarizmi resolve a equação, em primeiro lugar, multiplicando os dois lados por 12, o que dá

$$12 \times (1/12)\ X = 12 \times X + 12 \times 24,$$

o que se transforma em

$$X = 12X + 288.$$

— Em seguida — prosseguiu al-Flayli —, ele subtrai 12X dos dois lados da equação, produzindo

$$X - 12X = 12X - 12X + 288,$$

o que é igual a

$$X - 12X = 288.$$

— Depois — continuou al-Flayli, ele notou que, somando 36 aos dois lados, obtinha uma coisa muito interessante:

$$X - 12X + 36 = 288 + 36 = 324.$$

— Ora — prosseguiu ele —, a expressão à esquerda é um quadrado perfeito, ou seja, (X – 6) multiplicado por ele mesmo. Quer dizer, se você

multiplicar (X – 6) por (X – 6), obterá X – 12X + 36. A expressão à direita, que é um número simples, também é um quadrado perfeito, ou seja, 18^2. Se dois quadrados são iguais, iguais também são suas raízes quadradas, donde

X – 6 = 18,

— e, somando 6 a ambos os lados, chega-se finalmente à solução:

X = 24.

— Percebo que tudo isso é meio maçante — seguiu dizendo alFlayli —, mas em cada uma das etapas observamos o princípio do equilíbrio ou igualdade, e então, quase que num passe de mágica, a solução aparece. Existe um e apenas um número que satisfaz a equação: o número 24[a]. No começo, al-Kuarizmi não sabe qual será esse número, mas chama-o de X, que é a invenção mais simples, porém mais poderosa da matemática.

— Bem, não pretendo enganá-lo — acrescentou al-Flayli —, portanto, prepare-se para um choque. Al-Kuarizmi não usou o X, nem tampouco usou equações. Era tudo em palavras. Em vez de X, ele usou a palavra árabe *shay*, ou coisa. E, ao expor o problema, dizia mais ou menos o seguinte:

Um terço da coisa, multiplicado por 1/4 da coisa, produz a coisa acrescida de 12. Isso dá 1/12 do quadrado da coisa, donde o quadrado da coisa é igual a 12 vezes a coisa, acrescidas de 288.

— Não vou aborrecê-lo com a transcrição completa — disse-me al-Flayli —, mas isso lhe dá uma ideia do trabalho dele. Quem diria! Temos aí outro exemplo da cultura na matemática. Você pode ver duas criações matemáticas muito diferentes. Uma compõe-se de símbolos, outra de palavras. Ora, é muito fácil traduzir uma forma para a outra. Uma pessoa que não reconhecesse essa traduzibilidade poderia exagerar a importância da diferença, mas a diferença é superficial. Num nível mais profundo encontram-se as mesmas ideias, expressando as mesmas restrições dessa coisa desconhecida que chamamos de X.

— O que há de maravilhoso em X — concluiu al-Flayli — é o ato de fé que praticamos ao dizer "Vamos chamar a resposta de X", como se a invocássemos do Mundo Superior. Mas o que se invoca não depende da escolha pessoal. Tem-se que aceitar o que aparece. Essa é a arte do mago, ou do mágico antigo.

Al-Flayli ficou em silêncio, voltando os olhos para o teto. Atrevi-me a interromper sua meditação: — Considerando a conveniência real da notação moderna — perguntei —, por que al-Kuarizmi ou um de seus colegas não tropeçaram nas possibilidades do simbolismo?

— Eu mesmo tenho-me perguntado isso — respondeu al-Flayli. — Suponho que tenha sido a cultura que nos impediu de abandonar nossa língua. Como disse um piadista da Damasco do século XII, "As nações da humanidade têm três maravilhas: o cérebro dos francos, a mão dos chineses e a língua dos árabes". É isso. Na Casa da Sabedoria, e também noutros foros, alguns de nós não conseguiam impedir-se de expressar as ideias científicas e a poesia de um fôlego só. Como poderíamos fazê-lo com o X puramente simbólico, para não falar dos símbolos de adição, elevação ao quadrado e elevação ao cubo?

— O que tenho a dizer é o seguinte — completou al-Flayli: — durante mil anos, fomos colecionadores, guardiães e aperfeiçoadores do saber matemático. Fizemos muitas contribuições de natureza prática e algumas de natureza teórica ou geral. Omar Khayyam, por exemplo, resolveu inteiramente a equação geral de terceiro grau. Em suma, todos estávamos cientes do processo de generalização, mas também estávamos admirados com essa coisa diante de nós. Era mais do que uma simples manipulação de símbolos ou palavras, era uma forma de contato com algo que nos ultrapassava em muito, algo ao mesmo tempo adamantino e efêmero. Era algo em que podíamos sentir o perfume do Mundo Superior.

Até esse momento, o jovem Ahmed havia mantido serenamente a paciência, mas, afinal, não conseguiu mais se conter. — *Baba*, você não terminou a história da Casa da Sabedoria.

— É verdade, Ahmed. Fiquei muito absorto com a satisfação de nosso convidado. (Espremeu os olhos para Ahmed, como se o estivesse repreendendo, e de repente sorriu.) — Já é hora de você se deitar. Mas terminarei a história amanhã à noite, quando estivermos todos juntos no deserto.

Ahmed foi deitar-se e pressenti que meu tempo com al-Flayli naquela noite esgotava-se rapidamente. Só havia o suficiente para eu tentar arrancar dele a verdadeira influência da cultura na matemática islâmica.

— Você está me dizendo — perguntei — que os primeiros matemáticos árabes eram capazes de resolver problemas matemáticos complexos, tal

como fazemos hoje, sem serem afetados, isto é, sem que a matemática em si fosse afetada pela metafísica?

— Se o que você quer dizer com metafísica é a filosofia da Irmandade da Pureza, eu diria que sim — respondeu al-Flayli. — Havia uma separação nítida entre a matemática e sua filosofia, porque os primeiros matemáticos reconheceram desde cedo que a dedução, e nada além da dedução, deveria ser aplicada a qualquer definição ou axioma com que se deparasse. Entretanto, havia opiniões, opiniões amplamente aceitas, sobre o que poderíamos chamar de personalidade dos números.

Ergui as sobrancelhas, arregalando os olhos, e al-Flayli sorriu diante dessa visão.

— Será possível que você não soubesse que os números tinham personalidade? Eles representavam coisas, além da mera quantidade. Por exemplo, o número 1 representava a unidade, da qual provinham todos os outros números. Como tal, o número 1 representa Alá, Aquele que é Uno. O traço vertical do 1 é quase idêntico ao *alif* árabe, a primeira letra do alfabeto, que também é um traço vertical, e à primeira letra do nome de Deus. O número 2, primeiro dos números pares, representava a dualidade ou a criação. O número 3, que era visualmente simbolizado por um triângulo de pontos, representava a harmonia, enquanto o número 4, um quadrado, representava a estabilidade. E assim por diante, durante um bom tempo. Aliás — perguntou al-Flayli —, você já ouviu falar dos números amigos?

Em algum lugar de minha memória soou uma sineta. Seria de um curso sobre a teoria dos números, que eu tinha feito quando estudante universitário? A definição não me veio inteiramente à lembrança.

— Diz-se que dois números são amigos — continuou al-Flayli — quando cada um deles é a soma dos divisores do outro. Por exemplo, 220 e 284 são amigos. Os divisores de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110. Eles somam 284. Por outro lado, os divisores de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142. Eles somam 220.

— Para ser sincero — prosseguiu —, não tenho ideia do papel que a amizade desempenhava fora dessa definição. Imagino que alguém que perdesse um amigo poderia usar um amuleto que trouxesse gravado o número 220, ou o 284, para restabelecer a amizade perdida. Esse tipo de magia numérica era bastante comum no mundo antigo, e não apenas na Arábia.

— Mas o que eu sei — acrescentou al-Flayli — é que os números amigos fascinaram muitos matemáticos da época. Ou seja, à parte a magia, esses pares de números constituíam verdadeiros desafios para os matemáticos mais modernos, que nada sabiam da ligação mágica. Aliás, grandes matemáticos europeus, como Fermat, Descartes e Euler, estudaram o problema de descobrir todos os pares de números amigos. Mal chegaram a aperfeiçoar o método descoberto durante essa primeira fase áurea da matemática islâmica.

— Na época da Casa da Sabedoria — disse ainda al-Flayli —, foi Tabit ibn Qurra quem fez um progresso extraordinário nesse problema. Aqui está o teorema.

Al-Flayli retirou um papel de uma publicação histórica.

Teorema: Quando o número p tem a forma 3 . 2 – 1, q tem a forma 3 . 2 – 1, e r tem a forma $9 . 2^{n-1} – 1$, e quando todos os três números são primos, os números

a = 2 . p . q e b = 2 . r

são amigos.

— Você pode usar a fórmula de ibn Qurra para gerar muitos pares de números amigos — prosseguiu al-Flayli. — Mas o tamanho deles aumenta muito depressa. Para n = 4, por exemplo, os números *p*, *q* e r vêm a ser 23, 47 e 1.151, respectivamente. Observe que, nesse caso, todos os três números são primos. Não podem ser divididos com exatidão por nenhum número, exceto 1 e eles mesmos. Portanto, o teorema é aplicável. Pois bem, se você introduzir esses valores de p, q e r nas fórmulas de a e b do teorema, obterá a como o produto de 16, 23 e 47, ou seja, 17.296, e obterá b como o produto de 16 e 1.151, isto é, 18.416.

Al-Flayli escreveu esses dois números amigos numa folha de papel, para que eu os contemplasse:

17.296 e 18.416 são amigos.

E disse: — Pierre de Fermat redescobriu independentemente o teorema de ibn Qurra. Não foi uma coincidência, é claro. Há teoremas matemáticos sendo independentemente descobertos o tempo todo. É que, em minha

humilde opinião, eles estão à espera de ser descobertos, talvez no Mundo Superior. Seja como for, depois de Fermat, Descartes usou esse teorema para descobrir outro par de números amigos:

9.363.584 e 9.437.056

— Ao que eu saiba — concluiu —, os números amigos continuam indefinidamente.

Insisti com al-Flayli. Eu também queria saber mais sobre a álgebra. Se os árabes eram tão práticos, como era, exatamente, que utilizavam a álgebra?

— A ciência da *al jabr* — disse al-Flayli — era especialmente importante para resolver uma grande variedade de problemas práticos, como a divisão das terras, os trabalhos de construção, as transações comerciais e muitas outras coisas. Por exemplo, um homem tinha dinheiro suficiente para comprar 1.760 tijolos, com os quais esperava construir uma casa cujo comprimento tivesse o dobro da largura. Se as paredes tivessem 8 tijolos de altura, de que tamanho seria a casa que ele poderia construir com esses tijolos?

— Com bastante arrogância — continuou al-Flayli —, partimos do pressuposto de que já sabemos a resposta. Digamos que *shay* ou X seja o comprimento do lado mais curto da casa, medido pelos próprios tijolos. A área do piso, portanto, será de 2X em tijolos, e as paredes precisarão de 8 vezes o perímetro da casa, que é de 6X, resultando num total de 48X tijolos. Assim, temos a equação

$$2X + 48X = 1.760,$$

que podemos começar a resolver utilizando a *al jabr*, para simplificar os dois lados. Em suma, dividimos os dois lados da equação por 2. Isso produz

$$X + 24X = 880;$$

e usamos novamente a *al jabr* para somar –880 aos dois lados, reduzindo a equação para

$$X + 24X – 880 = 0.$$

— Bem — prosseguiu al-Flayli —, devo dizer que tivemos sorte, porque acontece que podemos escrever o lado esquerdo dessa equação como o produto de dois fatores:

$$(X + 44)\ (X – 20) = 0$$

E acrescentou: — Quando o produto de dois números é 0, um dos números tem que ser 0. Decorre daí que ou (X + 44) é igual a 0, ou (X – 20) é igual a 0. A primeira possibilidade leva a que X seja –44, o que não faz sentido para o problema em questão, pois não existe quantidade negativa de tijolos. A outra possibilidade leva a que X seja 20, o que significa que o lado mais curto da casa deverá ter 20 tijolos de largura.

— Apenas para confirmar — disse al-Flayli —, a *al jabr* disse ao homem que as dimensões de sua casa deveriam ser de 20 tijolos de largura por 40 tijolos de comprimento. Voltando aos termos separados da equação, o piso levará 2X2, ou 800 tijolos, e as paredes usarão 48X, ou 960 tijolos. O número total de tijolos utilizados, portanto, será 800 mais 960, o que dá 1.760, exatamente o número de tijolos que o homem irá comprar.

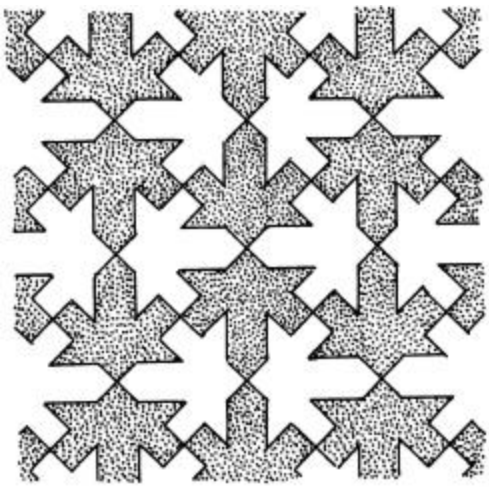
— E as portas e janelas? — perguntei.

Al-Flayli riu. — É verdade, deixei-as de lado, não foi? Bem, isso é muito fácil de resolver. Mas, sinceramente, você está percebendo o sabor desse método. Ele não é muito diferente do que os alunos do segundo grau aprendem hoje em dia.

— Você está cansado? — perguntou-me, de repente. Sabendo ser bem possível que ele quisesse recolher-se, admiti que sim. Então, ele me surpreendeu.

— Se não estiver cansado demais, há uma outra coisa que eu gostaria de lhe mostrar sobre a álgebra, mas ela se relaciona de um modo muito interessante com os desenhos geométricos pelos quais nós, os árabes, somos famosos.

Ele estendeu a mão para trás, com a mesma pontaria certeira, e apanhou um livro grande, com fotografias e reproduções em cores. Quando o abriu, não pude deixar de soltar uma exclamação. Havia estampas surpreendentes, compostas de padrões que se repetiam, alguns geométricos, alguns florais, mas todos, de algum modo, pautados no mesmo espírito cristalino.



Estampa islâmica de parede

— Essas estampas — disse al-Flayli — buscam o infinito, no sentido de que prosseguem indefinidamente. Mesmo quando se restringem a uma parede ou um piso, percebe-se que o mesmo padrão é passível de uma reprodução ilimitada. Com isso, todos os que veem essas estampas são convidados a pensar no infinito, uma qualidade que pertence unicamente a Alá e, talvez, ao Mundo Superior.

— Ora — prosseguiu ele —, do ponto de vista matemático, essas estampas são claramente geométricas, mas a álgebra também está por aí. Se você considerar as isometrias dessas padronagens, chegará à ideia do que hoje conhecemos como grupos.

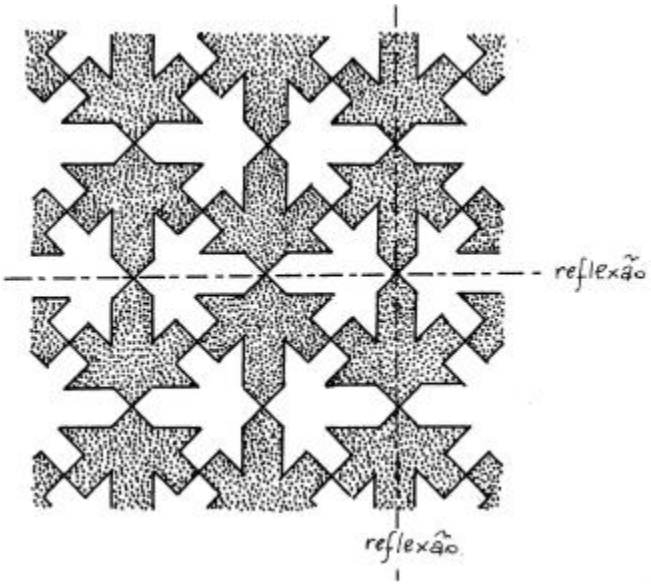
— Não me diga que os árabes descobriram os grupos! — retruquei. — Eu achava que esse conceito só tinha surgido no século XVIII.

Al-Flayli tornou a rir, mostrando poucos sinais de cansaço. — Não, não, de modo algum. No entanto, eles fizeram o que se poderia chamar de uma descoberta implícita. Antes de eu explicar isso, no entanto, é melhor revermos o que são esses grupos.

— Olhe atentamente para esse desenho — disse-me. — Se você mover toda a figura para cima, em uma certa distância (ou comprimento), obterá exatamente o mesmo desenho. Essa é uma operação de isometria. Chama-se *translação*. Você também pode ver uma outra translação, que vai para a direita. Se deslocar o desenho inteiro para a direita, verá que ele coincide consigo mesmo, como coincidiu quando você o deslocou para cima. É outra translação. Você consegue perceber alguma outra isometria nesse desenho?

— Percebo que ele também é uma imagem especular dele mesmo — observei.

— Sim. Isso se chama re*flexão*. Você pode inverter a imagem 180 graus, virando-a para fora da página e de volta à página, e verá o mesmo desenho reaparecer. Mas essa inversão só pode ser feita seguindo certas linhas, chamadas *linhas de reflexão*, como você pode ver:



Linhas de isometria

— Há uma outra operação — continuou al-Flayli —, chamada *rotação*. Ela se explica por si só. Existem alguns pontos em que é possível girar o desenho inteiro 90 graus, obtendo o mesmo desenho. A questão é que essas operações de isometria têm uma propriedade muito interessante, que eu creio que simplesmente não ocorreria a ninguém no mundo antigo. Se você fizer com que uma operação de isometria seja seguida por outra, obterá uma terceira operação de isometria. Em outras palavras, você pode tratar essas operações como símbolos, "multiplicando-os". E mais, essas operações obedecem a certas leis matemáticas — acrescentou al-Flayli, enumerando-as nos dedos:

— Um: o produto de duas operações de isometria é uma operação de isometria, como você acabou de ver.

— Dois: existe uma operação nula de isometria, que não desloca o desenho. Isso é claro. Basta não fazer nada. Talvez isso pareça não fazer sentido, até você ouvir a lei seguinte.

— Três: para cada operação de isometria, existe uma operação inversa. Entende o que eu quero dizer? Em outras palavras, para cada operação de isometria, seja ela uma translação ou uma rotação, existe uma outra que desfaz tudo o que a primeira operação fez. O resultado da multiplicação de uma operação de isometria por seu inverso é a operação nula, é claro. O resultado dessa multiplicação específica de uma operação de isometria por seu inverso é o mesmo que não fazer nada. A operação nula desempenha nos grupos o mesmo papel do zero nos números. Na verdade, os grupos generalizam os números.

— Existe uma quarta lei — al-Flayli continuou a enumerar —, que diz, a rigor, que, ao fazer sequencialmente três operações de isometria, não importa a sua maneira de encadeá-las, você pode fazer a primeira operação e acompanhá-la com o produto das duas seguintes. Ou pode tirar o produto das duas primeiras e acompanhá-lo com a terceira operação. Receio não ter explicado isso muito bem, mas, na verdade, não tem importância. O ponto principal que quero frisar é apenas um. Essas quatro regras são simplesmente os axiomas do que chamamos de grupo. Diferentes tipos de isometria de um desenho levam a um tipo diferente de grupo.

— Ora — acrescentou al-Flayli —, nem todos os desenhos deste livro têm o mesmo grupo, como você poderia suspeitar. Por exemplo, alguns podem sofrer uma rotação de 60 graus, outros, somente de 90 graus. Ficou provado, no século XIX, que o número de grupos de isometria possíveis é finito. Existe apenas um certo número deles: 17, na verdade.

— É mesmo? Eu imaginaria um número infinito — comentei.

— De modo algum. Apenas 17, nem mais nem menos. E todos eles podem ser encontrados em algum lugar dentro das fronteiras do antigo império islâmico. Todos eles.

— Agora entendo o que você está querendo dizer — comentei, surpreso. — Em outras palavras, os antigos criadores desses padrões maravilhosos nunca conseguiram uma padronagem com isometrias básicas que se desviasse dos 17 tipos possíveis, mas, na verdade, descobriram todos eles, não é?

— Exatamente.

— Isso levanta a questão de saber se os desenhistas estavam cientes de que existia um limite.

— É uma excelente pergunta — disse al-Flayli. — Havia alguns gênios entre eles, sem dúvida. E que mescla de talentos: metade arte, metade matemática! Em alguns desenhos, há indícios claros de que o artista estava fazendo um esforço de incorporar isometrias proibidas, sendo repelido pelo Mundo Superior, por assim dizer. Por exemplo, em alguns desenhos, você encontrará uma isometria quíntupla, como padrões que podem sofrer uma rotação de 72 graus, cinco dessas rotações compondo uma rotação completa de 360 graus.

— Ora — comentou ele —, essa isometria, em particular, não pertence a nenhum desses grupos. O artista consegue fazer isso, certificando-se de que todas as operações reais de isometria transportem uma figura proibida para outra. Veja o que estou querendo dizer.

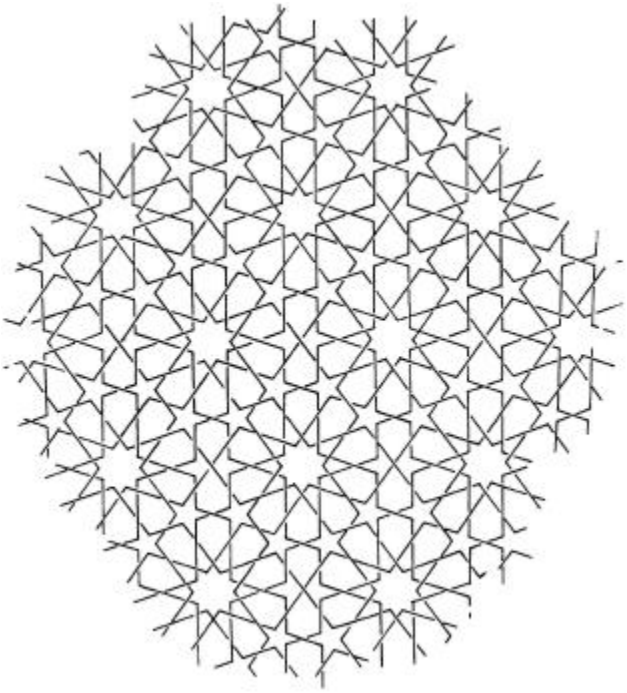
Ele abriu o livro numa página e a exibiu. Pôs o livro em meu colo, levantou-se e postou-se em frente a mim.

— Eu realmente lhe devo desculpas. Deixei-me levar pelo orgulho por minha herança, em vez de considerar o seu bem-estar, que deveria vir em primeiro lugar. Você me perdoa?

Aquela talvez fosse a maneira de al-Flayli pedir licença para ir se deitar, de modo que também me levantei.

— Não há nada a desculpar — garanti-lhe. — Como é que eu poderia estar menos interessado nessas coisas do que você?

Al-Flayli soltou uma gargalhada sonora, o que era uma coisa inusitada. — Ainda havemos de transformá-lo num árabe!



Isometria quíntupla (falsa)

Ele me conduziu até meu quarto, que estava bastante fresco. A única janela, voltada para o oeste, descortinava o ocaso da lua crescente, deixando entrar sua luz fria.

— Talvez você considere — disse al-Flayli, no mais tranquilo dos tons — a ideia de observar a lua enquanto ela se põe. Poderá vê-la facilmente da cama. Pense que a Lua não brilha com luz própria, mas pela luz do Sol. Os antigos astrônomos árabes sabiam disso. É que a Lua representava Maomé, que não brilhava com luz própria, mas com a luz de Outro. É por isso que a lua crescente tem um lugar tão especial no simbolismo do Islã.

— Amanhã iremos a Wadi Rum — disse al-Flayli, fechando a porta.

Normalmente não durmo bem na casa de outras pessoas, mas ali, por razões que não consegui identificar, senti-me em casa. A lua estava linda, avermelhando-se ao desaparecer atrás das montanhas a oeste, e caí num sono profundo.

a O autor, talvez por razões históricas, não considerou que (–18) também resulta em 324. Daí ter encontrado somente uma das duas soluções da equação. Caso houvesse considerado esta alternativa, teria encontrado também o número (–12) como solução. Da seguinte forma: (x – 6) = (–18) / x – 6 = –18/x = –12. (N.R.T.)

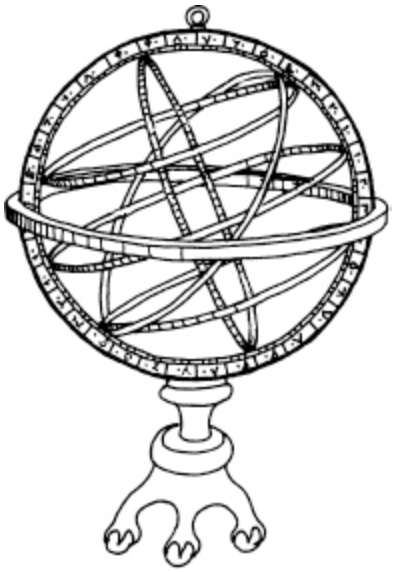
CAPÍTULO 4

AS ESFERAS

O sol matinal brilhava tanto que eu mal conseguia discernir os detalhes da varanda a meu redor. Antes que eu terminasse meu pão árabe, generosamente recheado de geleia de damasco e queijo cremoso, Ali e Ahmed pediram licença para fazer os preparativos da viagem. Tomei meu café na parte da frente da casa, observando-os carregarem sacos de dormir, garrafas térmicas e cobertores extras. Finalmente terminaram, e al-Flayli voltou para dentro de casa.

— Quero mostrar-lhe uma coisa antes de sairmos — disse Ali. Entrou em seu escritório, onde havia num canto, sobre um pedestal, um instrumento de bronze de aparência peculiar. Compunha-se de várias tiras circulares que formavam uma esfera oca.

— Isso se chama *esfera armilar* — explicou —, um instrumento antigo que incorpora muitos conhecimentos importantes sobre o céu noturno, os planetas e as estrelas. Tem uma faixa equatorial no meio e uma faixa elíptica, disposta num certo ângulo em relação a ela. Vou explicar-lhe esses termos hoje à noite, mas, por enquanto, quero que você examine este formato esférico. Ele é quase um modelo literal do que os antigos astrônomos supunham ser o céu.



Esfera armilar

— Uma esfera? — indaguei.

— Exatamente. A ideia de as estrelas estarem presas a uma imensa esfera giratória é uma ilusão, é claro, mas é uma ideia importantíssima. Na verdade, a esfera é um modelo perfeitamente adequado para as posições estelares, se você não estiver preocupado com a distância que separa os diversos astros. Especifique as posições deles numa esfera imaginária, tendo a Terra ao centro, e você terá especificado os locais para onde os astrônomos, antigos ou modernos, podem apontar seus instrumentos. Para essa finalidade, o modelo esférico é perfeitamente adequado. Hoje em dia, chamamos esse modelo abstrato de esfera celeste. Como você pode ver, examinando a faixa equatorial e as outras, elas são graduadas. Na verdade, a posição de qualquer astro no céu noturno pode ser indicada em termos de apenas dois ângulos, como a latitude e a longitude. Também vou explicar isso mais tarde.

A esfera armilar tinha um ar inconfundivelmente antigo. — Ela deve ser muito antiga — opinei.

— A original — declarou al-Flayli, com seu jeito contido — encontra-se no Museu Britânico. Esta é uma cópia exata de um instrumento que remonta à Pérsia do século XIII. Mas já é hora de partirmos — observou, subitamente. Estava atipicamente alvoroçado. Entramos no Land Rover, enquanto ele se demorava um pouco, trocando algumas palavras com

Amina. Ela sorriu e acenou enquanto partíamos, dizendo: — Espero que vocês fiquem seguros nos camelos.

Quando saímos da garagem e começamos a descer a estrada íngreme, perguntei a al-Flayli o que ela havia pretendido dizer.

— Apenas que os camelos parecem muito bonitos nos filmes, e que os iniciantes imaginam que gostariam de montar num deles. Mas, quando sobem e se dão conta da altura, muitas pessoas querem descer na mesma hora. Qualquer viagem, por mais curta que seja, simplesmente as aterroriza. Eu me pergunto se você será assim — e deu um sorriso tímido.

Durante a hora seguinte, preocupei-me com essa possibilidade a cada cinco minutos, em média. Durante esse intervalo, atravessamos as montanhas e descemos para uma vasta extensão de cerrado, pontilhado de arbustos baixos de aparência cerosa. Uma curva fechada que saía da estrada principal, e que Ahmed fez numa velocidade quase suficiente para levar o Land Rover a capotar, fez-me esquecer tudo sobre os camelos. Seguimos então por uma trilha pedregosa, visível apenas como duas tênues cicatrizes que serpenteavam a meia distância, onde se erguiam maciças montanhas isoladas. As montanhas eram de tom arroxeado e ocre, carmesim e marrom, todas esmaecendo-se na distância e se transformando numa tonalidade cinzenta. Era espantoso, como uma paisagem lunar.

— Logo chegaremos a Wadi Rum — gritou al-Flayli, em meio ao barulho e à poeira. A estrada contornava uma das montanhas, que nesse momento erguia-se majestosamente à nossa direita. Descortinou uma paisagem que jamais esquecerei. À nossa frente, o *wadi*, ou desfiladeiro, serpenteava em direção ao sul, como um imenso piso plano de areia e pedras, dominado por uma fileira de penhascos que avançavam até quase o ponto de fuga.

Em meia hora, chegamos a um aglomerado confuso de tendas negras de pele de cabra. Um senhor idoso saiu correndo de uma delas. Al-Flayli explicou: — Ele é o xeque dos Bani Harith, uma tribo nômade que já vive aqui há muitos anos.

Saltamos do Land Rover e, enquanto al-Flayli e o xeque discutiam os detalhes da viagem, Ahmed levou-me para visitar umas ruínas que entravam serenamente em decadência, junto à parede do desfiladeiro situado atrás do acampamento.

— Aqui, como você deve saber, ficava antigamente um forte romano. É por isso que chamam o lugar de Wadi Rum, ou wadi [desfiladeiro] dos romanos. Ali você pode ver as ruínas das termas e, lá adiante, o lugar onde ficava a caserna.

Os homens da tribo que al-Flayli havia contratado como guias não estavam especialmente ansiosos por partir. Pelos padrões deles, explicou o astrônomo, a viagem seria curta, e eles tinham tão pouco prazer em sair no calor quanto qualquer outra pessoa. Assim, sentamo-nos na tenda do xeque, bebendo xícaras e mais xícaras de café forte, enquanto o xeque fumava um cigarro atrás do outro. Os beduínos ouviram atentamente quando al-Flayli dirigiu-se a eles em árabe, presumivelmente explicando nossa missão no deserto. A certa altura, o xeque lhe fez uma pergunta e al-Flayli ergueu-se abruptamente. Reapareceu minutos depois, trazendo uma bolsa de feltro. Houve exclamações de surpresa em todo o círculo quando ele retirou da bolsa um instrumento plano e circular. Em árabe, explicou a nossos anfitriões do que se tratava, deixando que eles o passassem de mão em mão pela roda.

Quando o instrumento chegou a minhas mãos, al-Flayli passou para o inglês. — Este instrumento chama-se astrolábio. Data da Sevilha do século XI.

— Impressionante — disse eu, examinando-o por todos os ângulos.

Astrolábio

Era um disco de bronze, pouco maior do que minha mão. De um dos lados havia um círculo giratório peculiar, dividido em graus, com raios que tinham estranhos ponteiros denteados. Quando girei o disco, os ponteiros moveram-se sobre uma grade recurvada de linhas. Al-Flayli explicou que eles representavam as estrelas importantes. Do outro lado do instrumento havia um braço móvel, com uma pequena vigia numa extremidade e uma mira na outra. O braço girava em torno do pino central que sustentava todo o instrumento, o qual era recoberto de inscrições complexas e decorado com belíssimos arabescos em metal.

— Ao girar o disco que fica na frente do instrumento, na verdade você simula a aparente rotação do céu em torno da Terra. Entretanto, o céu reside numa esfera imaginária, como já expliquei, enquanto o astrolábio é plano, como um mapa. É por isso que todas as linhas da grade são mais ou menos curvas. Elas representam os meridianos da longitude e as linhas da latitude na esfera celeste.

De algum modo, o instrumento parecia-me sofisticado demais para a época. — O fabricante do instrumento calculava essas linhas, ou apenas as conjecturava? — indaguei.

— As linhas eram calculadas. Elas representam outra contribuição dos árabes para o mundo da matemática: a *trigonometria*, ou ciência dos ângulos, como se pode chamá-la. Se virar o instrumento, você verá um braço móvel de visualização que gira em torno do centro do instrumento. O braço encosta numa escala graduada, cujos graus são diretamente gravados no anel do instrumento. Ao ser utilizado, o astrolábio era pendurado pelo anelzinho que há na parte superior, pendendo diretamente para baixo. A posição zero do braço de visualização, nesse momento, ficava numa vertical perfeita, apontando para o *zênite*, ou o ponto mais alto do céu. Girando o braço até que uma dada estrela ficasse visível pela pequena vigia, era possível medir a posição angular da estrela abaixo do zênite, lendo o ângulo indicado no anel. Esse é o ângulo formado pela estrela com a vertical. É chamado de *declinação*.

— Portanto — continuou al-Flayli —, está tudo aí, nesse pequeno instrumento. A esfera celeste foi achatada, mapeada num plano, a rigor. Ao ler um ângulo na parte posterior, você simplesmente vira o instrumento do outro lado e gira o céu até conseguir esse ângulo. Nesse momento, você verá a posição de todas as outras estrelas principais na extremidade desses ponteirinhos.

Quanto mais ele explicava o instrumento, mais maravilhoso ele me parecia. Foi quando deixei escapar uma exclamação: — Mas, na verdade, é como um planetário em miniatura!

— Exatamente — disse al-Flayli, que então se voltou para os outros e falou rapidamente com eles em árabe. — Eles estão conversando sobre o filme *Lawrence da Arábia*, que foi quase todo rodado na região para onde estamos indo. Um desses homens trabalhou como extra no filme. O próprio xeque era menino na época da Revolta Árabe.

No meio da tarde, fomos interrompidos por um grito juvenil que vinha de fora da tenda. Virei-me para olhar e vi um menino montado num camelo gigantesco, que marchava devagar em nossa direção sobre patas enormes, com o corpanzil balançando pesadamente. O garoto segurava cordas ligadas a outros cinco camelos, que o seguiam obedientemente. Havia algo de grandioso naquela visão, alguma coisa de eterno.

Quando eles se aproximaram, um homem entrou na tenda do xeque e resmungou algo no ouvido do ancião. — Eles estão prontos para nos levar — traduziu al-Flayli.

Meu plano para montar o camelo consistia em ficar de olhos fechados o máximo possível, abrindo-os bem devagarinho. Foi fácil montar no animal ajoelhado. Depois ele se levantou, carregando para o alto o meu mundo de trevas. Eu podia senti-lo oscilando embaixo de mim, não tanto de um lado para outro, mas para frente e para trás. Quando dei uma espiada pelo canto do olho, vi al-Flayli e seu filho, além de outros dois homens e do menino dos camelos.

— Você monta como se tivesse nascido para isso — disse al-Flayli, emparelhando seu camelo com o meu —, mas a paisagem é muito melhor quando se fica de olhos abertos, como poderá constatar.

Deu-me um sorriso amistoso, o que me tornou impossível ficar ressentido com sua observação.

Depois de passarmos pela última montanha, vimo-nos diante de um mar de areia, feito de dunas imensas que alternadamente tragavam nossa pequena caravana em suas depressões e, depois, nas cristas, revelavam outras dunas à nossa frente, marchando para o infinito.

— Esta é uma rota de comércio antiquíssima — disse al-Flayli. — Por aqui passavam as caravanas entre Meca e Damasco. Sedas da China, especiarias das Índias, ouro e marfim da África. Quando a temperatura

ficava particularmente alta, a caravana parava durante o dia, todos descansando embaixo de toldos. E viajavam à noite, sob as estrelas. Navegavam pelas estrelas, como os navios no oceano. É que o deserto é tão desprovido de trilhas quanto o mar, e não dispõe de placas de sinalização nem estradas.

— Como disse certa vez o sábio — continuou al-Flayli —, “De dia és cego, mas à noite vês a majestade d’Ele”. Esta noite, com as bênçãos de Alá, você verá o que viam os viajantes do deserto.

— A história da astronomia islâmica, na verdade, é a história do plano e da esfera — prosseguiu ele. — Através da ciência da trigonometria, que eles desenvolveram, os astrônomos árabes puderam projetar a esfera estrelada da noite sobre o plano de um mapa, como o que é representado na face do astrolábio. Era assim que isso funcionava.

— Imagine — sugeriu al-Flayli — um hemisfério ou uma tigela esférica emborcada sobre uma superfície plana, como um futuro mapa. Em seguida, imagine que a tigela é coberta de pontos, em várias localizações ao acaso. São as estrelas. Por último, imagine uma linha reta pendendo de cada uma dessas localizações para o mapa e tocando-o num certo ponto. Esse ponto seria a posição da estrela no mapa. Esses mapas estelares eram rapidamente produzidos pelos astrônomos primitivos, não mediante o uso de fios de linha, mas através de funções trigonométricas.

— Você quer dizer que a trigonometria é equivalente a fazer um fio de linha pender de cada estrela, um fio que encosta num mapa? — perguntei.

A voz dele chegava a mim em ondas, conforme seu camelo balançava pesadamente para frente e para trás. — Precisamente. Foi essa conversão da posição esférica para a plana que a trigonometria efetuou. Imagine por um instante que você é um astrônomo primitivo, chamado al-Dioudni. Trabalhando num observatório avançado para a época, você quer determinar a posição de uma determinada estrela no céu noturno. Para isso, teria que medir dois ângulos formados pela estrela: um ângulo vertical e um horizontal.

— Para o ângulo vertical — prosseguiu —, sua linha basal seria o piso do observatório, perfeitamente nivelado durante a construção, ou, o que seria mais simples, uma linha perfeitamente vertical, obtida com um *prumo*, isto é, um peso suspenso num fio que, graças à gravidade, ficaria perfeitamente vertical. Ora, você poderia usar o braço visor do astrolábio

para medir esse ângulo, mas, por não ser um instrumento grande, o astrolábio não é muito preciso.

— É provável — acrescentou al-Flayli — que você usasse uma *alidade*, ou vara de medição visual. Na verdade, tratava-se de um par de braços de madeira ou bronze, encaixados num arco circular graduado, feito do mesmo material. Com um dos braços em posição vertical perfeita, coincidindo com o prumo, movia-se o outro braço até se avistar a estrela, alinhada com os visores das duas extremidades. Então, simplesmente se verificava o ângulo na escala do arco, e esse ângulo era a declinação da estrela em questão.

— Se você tomasse por base o piso do observatório — prosseguiu al-Flayli — e fizesse sua mensuração a partir dele, obteria a *altitude* da estrela. É claro que a declinação e a altitude podiam ser livremente convertidas um na outra, subtraindo-se qualquer uma delas de 90 graus. Assim, uma declinação de 35 graus seria a mesma coisa que uma altitude de 90 – 35, ou seja, 55 graus; e vice-versa.

— E o outro ângulo, o horizontal? — indaguei. Eu já havia imaginado uma possibilidade.

— O outro ângulo, que hoje chamamos de ângulo horário, era medido utilizando-se a base da alidade. Tendo a estrela no visor e a base apoiada numa outra escala angular, era possível descobrir a posição horizontal da estrela.

— Se a linha de base do ângulo vertical era o fio do prumo — insisti —, qual era a linha de base do ângulo horizontal? Era algum ponto fixo na paisagem local?

— Você tem razão, eles também precisavam de uma linha de base para obter essa medida, mas não era um ponto fixo no horizonte. Na maioria das vezes, creio que eles usavam o norte verdadeiro, determinado pela estrela polar, al-Qutb. Hoje em dia, essa estrela é chamada de Polaris, ou Estrela Polar. Polaris parece ficar estática, enquanto as outras estrelas giram lentamente a seu redor, como derviches. Ocorre que o polo geográfico da própria Terra aponta mais ou menos diretamente para Polaris, o que faz dela um ponto natural em que é possível basear todas as medidas horizontais. A linha de base para o ângulo horizontal correria para o norte, conforme determinado pela Estrela Polar. E aí está.

— Agora entendo os dois ângulos — disse eu —, mas, de que modo os árabes usavam esses ângulos, e onde foi que entrou a trigonometria?

— Bem, para começar, era possível determinar a hora do dia ou da noite, e até a época do ano, usando esse par de ângulos. Se lhe acontecesse medir uma das estrelas *importantes*, as que aparecem na face do astrolábio, por exemplo, você poderia verificar a hora num *almanaque*, palavra árabe que significa tabela ou compilação. Eles haviam herdado o sistema horário sexagesimal dos babilônios, essencialmente o que é hoje usado no mundo inteiro. Conhecendo esses ângulos, podia-se procurá-los num almanaque e dizer que horas eram nesse sistema horário. Também era possível fazer o contrário. Consultava-se a hora no almanaque para saber onde procurar qualquer daquelas estrelas.

— Isso me faz lembrar — continuou al-Flayli — que a palavra *almanaque* é apenas uma, em centenas de palavras e nomes em inglês, que vieram do árabe. Ahmed!

— Sim, *baba*! — respondeu Ahmed, que levou alguns minutos para trazer seu camelo para perto dos nossos. Era um animalzinho escuro e com ideias próprias.

— Diga ao *sayid* Dewdney a lista de palavras árabes em inglês.

— Albatroz, [a] alquimia, álcool, alcova, alambique, álgebra, álcali, almagesto, almanaque, abricó, alcachofra, assassino, azimute, >*azure* [azul-celeste], *backsheesh* [gorjeta], bazar, bórax, calabaça, calibre, califa, camelo, cânfora, cana, quilate, caravana, química, cifra, café, corcho [cortiça], algodão, dervixe, *dhow*,[b] elixir, gazela, *ghoul*,[c] harém, haxixe, azar, hena, islame, islamismo, jasmim, *jinn*,[d] julepo, quibe, *kismet* [sina], *kohl*,[e] laca, lápis-lazúli, limão, lilás, lima, alaúde, macramé, armazém, marabu, almofada, minarete, mesquita, almuadem, múmia, mirra, nababo, nadir, laranja, safári, açafrão, xale, gergelim, xeque, sorvete, siroco, sofá, açúcar, sultão, talco, tamarindo, tamborim, tarifa, estragão e zênite.

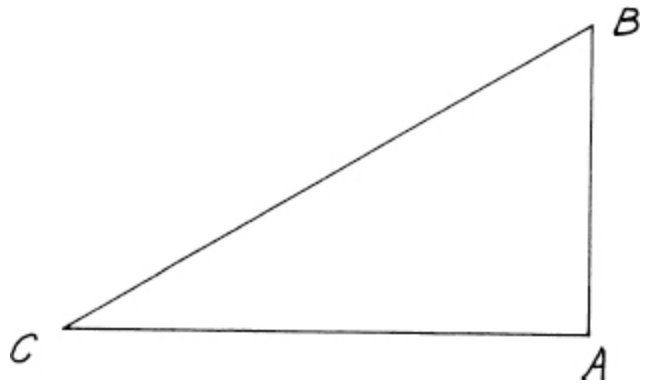
— Excelente, Ahmed, excelente mesmo! — disse al-Flayli.

Ahmed sorriu, satisfeito com sua proeza. — Deixei de lado os nomes de lugares e de estrelas — desculpou-se.

Al-Flayli finalmente voltou-se para a trigonometria. — É uma ideia muito simples, mas como é importante para a astronomia! Como sabem todos os que estudam trigonometria, o assunto diz respeito aos ângulos e lados do triângulo retângulo, tema que você explorou dias atrás com seu amigo Pygonopolis. A trigonometria é, essencialmente, uma maneira de fazer uma tradução entre os ângulos de um triângulo retângulo e as razões

dos lados. Não preciso parar para desenhar um diagrama na areia, pois você pode facilmente visualizar o que estou dizendo, usando seu quadro-negro mental. Desenhe nele um triângulo retângulo deitado de lado, com o ângulo reto à direita. Chamaremos de A o vértice desse ângulo. Vamos chamar de B o vértice acima dele, e de C o vértice que fica no outro canto.

Visualizei algo mais ou menos assim:



O triângulo que imaginei

— Com esse pequeno sistema de denominações, podemos dar nomes aos lados do triângulo e a seus ângulos. Por exemplo, a hipotenusa do triângulo (lado oposto ao ângulo de 90º) será chamada de BC, e o ângulo que nos interessa, o que fica em C, será chamado de ACB.

— O chamado seno do ângulo ACB — continuou al-Flayli — é a razão entre o comprimento do lado vertical AB e o comprimento da hipotenusa BC. Usando os nomes dos lados como uma representação abreviada de seus comprimentos, diríamos que o seno do ângulo ACB é a razão

AB/BC

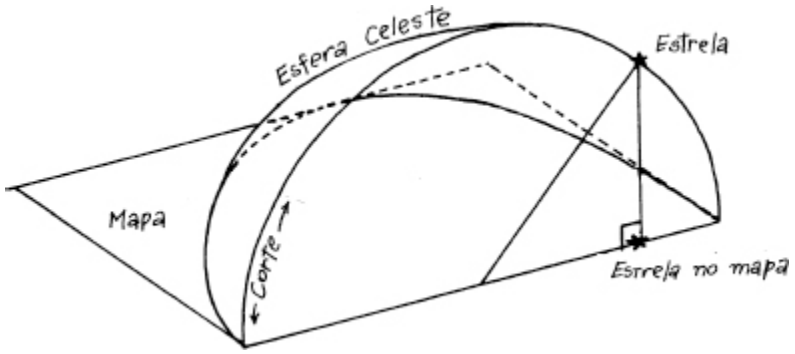
— A outra grande função trigonométrica — prosseguiu ele — é chamada de *cosseno*. Nós o definimos como a razão entre a base do triângulo e a hipotenusa,

AC/BC

— Agora — disse ainda al-Flayli —, vamos supor que o famoso astrônomo al-Dioudni tenha acabado de medir o ângulo ACB com sua alidade. Em seguida, ele procuraria o cosseno de ACB, que se escreve

cos(ACB),

numa tabela de cossenos. Esse é o número que representa a altitude da estrela num plano. Em seu quadro-negro mental, desenhe um círculo que represente um corte na esfera celeste. Trata-se de um semicírculo, no qual você pode colocar uma estrela numa posição arbitrária. Agora, ligue o centro do círculo à estrela e desenhe uma perpendicular da estrela até a base do semicírculo.



Mapeando a esfera celeste

— Esse é o “fio” de que você falou? — perguntei.

— Precisamente. Agora, você tem um triângulo retângulo, e a razão entre a base e a hipotenusa é o cosseno do ângulo de altitude. Se tomarmos o comprimento da hipotenusa como uma unidade, digamos, um metro, o cosseno será o que a tabela nos disser que é. Suponhamos, por exemplo, que a altitude da estrela seja de 35 graus. Espere um minuto. Ahmed!

Ahmed tornou a manobrar seu camelo, emparelhando-o com os nossos. — Sim, papai?

— Qual é o cosseno de 35 graus?

— O cosseno de 35 graus — recitou Ahmed — é 0,819, com três casas decimais, papai.

— Muito bem, Ahmed — disse al-Flayli. Depois, dirigindo-se a mim sem que Ahmed ouvisse, acrescentou: — Ele é um filho realmente extraordinário. Alá nos abençoou!

— Então, veja bem — prosseguiu. — O ponto do mapa circular que estamos marcando ficará a 81,9 centímetros do centro. O ângulo restante, o horizontal, poderá ser diretamente usado. Talvez você prefira imaginar esse mapa como uma teia de aranha. O centro corresponde ao zênite e as

coordenadas do ângulo horizontal são as linhas que se irradiam para fora. Numa dessas linhas existe um ponto, situado a pouco mais de 80 centímetros do centro. Essa é a nossa estrela, desenhada no mapa!

A explicação me confundiu, até eu me lembrar que al-Flayli havia falado num hemisfério emborcado sobre um plano. A parte situada embaixo da tigela seria um disco, é claro, um “futuro mapa” circular. Uma vez concluído, portanto, o mapa seria exatamente o que veríamos, se pudéssemos olhar a tigela diretamente de cima para baixo. Restava apenas uma dificuldade.

— Mas, como é que os antigos astrônomos calculavam os cossenos, para não falar nas outras funções trigonométricas? — perguntei.

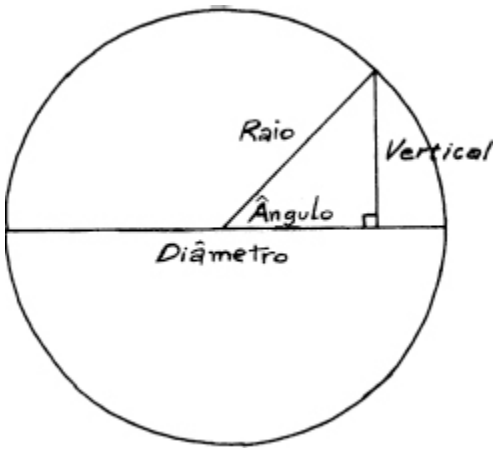
— Não tenho certeza de que alguém saiba exatamente como eles calculavam essas tabelas. A maneira mais simples e mais fácil, no entanto, e que estaria ao alcance de qualquer dos matemáticos primitivos, seria usar uma espécie de computação analógica.

Dei uma olhadela de esguelha para al-Flayli, para lhe indicar minha perplexidade, porém mal conseguia vê-lo contra a luz intensa do sol poente.

— Quero dizer apenas que eles usavam um círculo muito grande, cuidadosamente desenhado, para calcular a razão — prosseguiu o astrônomo. — O que eu acho que eles faziam é o seguinte: numa superfície plana de pedra ou metal, com o maior tamanho possível, eles desenhavam um círculo, traçado com precisão com a linha mais fina que se possa imaginar. Em seguida, traçavam o diâmetro do círculo e marcavam os graus, com toda a exatidão possível, em pelo menos um quarto do círculo. Depois disso, mediam para cada grau o comprimento vertical do ponto situado acima do diâmetro, e tiravam a razão entre esse comprimento e o raio do círculo.

— Fiz exatamente isso, a título de experimento — acrescentou al-Flayli —, e constatei que conseguia produzir uma tabela de senos com um grau de precisão de três casas decimais, o que é praticamente tão bom quanto as antigas tabelas. Imagino que você consiga visualizar esse processo.

Eu conseguia, e ele tinha mais ou menos esta aparência:



Traçando o seno

— Com uma tabela razoavelmente exata de senos — continuou al-Flayli —, as outras funções trigonométricas podiam ser derivadas através da aritmética. Posso ilustrar isso voltando ao triângulo retângulo que discutimos antes, o que chamamos de ABC. O seno do ângulo ACB é a razão entre o lado vertical, AB, e a hipotenusa, BC, enquanto o cosseno é a razão entre a base, AC, e a hipotenusa. Agora, deixe-me recitar a fórmula de Pitágoras:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

— Assim — acrescentou —, tudo o que temos que fazer é dividir todas essas três quantidades pelo quadrado da hipotenusa, para chegar a

$$(AB/BC)^2 + (AC/BC)^2 = (BC/BC)^2$$

Em outras palavras, uma vez que a razão BC/BC é apenas a unidade, ou 1, verifica-se que as razões ao quadrado são o seno e o cosseno elevados ao quadrado:

$$\text{sen}^2(ACB) + \cos^2(ACB) = 1$$

Por último, para calcular o cosseno a partir do seno, usamos um pouco mais de álgebra, obtendo primeiro

$$\cos^2(ACB) = 1 – \text{sen}^2(ACB),$$

e, depois,

$$\cos(ACB) = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,(ACB)}.$$

— Em outras palavras — prosseguiu al-Flayli —, se você souber o seno de um ângulo, será fácil obter o cosseno: basta elevar o seno ao quadrado, subtraí-lo de 1 e extrair a raiz quadrada do número resultante. Esse será o cosseno.

— Para os matemáticos — continuou ele —, essa é uma fórmula quase banal, mas ela ilustra um aspecto importante da matemática: os conhecimentos provenientes de muitas áreas diferentes da matemática confluem e se juntam imperceptivelmente. Primeiro vêm as definições: do seno, do cosseno e de outras razões trigonométricas provenientes de um triângulo retângulo. Depois, vem o teorema de Pitágoras, que também se refere a triângulos retângulos. Em seguida vêm as regras da álgebra pelas quais a fórmula foi encontrada. E por último, existem as aplicações, os números reais, os senos dos ângulos que você pode querer encaixar na fórmula, para descobrir os cossenos correspondentes. A maioria das fórmulas surge dessa maneira.

— Talvez me falte imaginação — concluiu al-Flayli —, mas não consigo imaginar uma fórmula mais rápida ou mais simples para transformar senos em cossenos. Quanto aos senos, eles devem ter sido medidos!

— O que algumas pessoas talvez não avaliem — arrisquei-me a dizer — é que a exatidão dessas medidas tinha uma dependência crucial da precisão com que o círculo fosse desenhado.

— É verdade. Pensando bem, essa observação leva a mais uma resposta à sua pergunta acerca da independência da matemática e do problema da descoberta.

Isso não me havia ocorrido.

— Esse fenômeno não lhe diz alguma coisa? — perguntou al-Flayli. — Na exata medida em que o círculo traçado com precisão for a encarnação do círculo abstrato, do círculo do Mundo Superior, os resultados serão exatos. Duas pessoas muito diferentes, compilando uma tabela de senos através do método que resumi, poderiam muito bem obter resultados ligeiramente diferentes, pelo menos na última casa, ou coisa semelhante. No entanto, à medida que cada uma tentasse uma sucessão de círculos cada vez maiores e mais bem traçados, não apenas suas tabelas entrariam em acordo, como

também a exatidão de seus resultados aumentaria rapidamente. Elas estariam descobrindo os valores reais dos senos.

— Mas, isso é meio diferente, não é? — retruquei. — Afinal, elas não estariam trabalhando com círculos abstratos, mas com encarnações deles.

— Exato. E é justamente por isso que você pode ao menos ver e tocar na fonte das informações delas. Os erros que elas cometessem proviriam de ligeiras imperfeições nos círculos traçados, das réguas que elas usassem para medir os comprimentos e até de sua maneira de tirar as medidas. Na verdade, os erros decorrentes de instrumentos e da observação infiltram-se tanto na astronomia de hoje quanto faziam mil anos atrás. Hoje em dia, porém, temos uma teoria matemática dos erros, um ramo da estatística que nos informa a extensão dos erros, para que possamos saber quão perto estamos de uma resposta correta. Seria possível que sequer concebêssemos essa possibilidade sem que houvesse algo por trás de tudo, sem que houvesse algo que se pudesse chamar de uma resposta correta? E onde está essa resposta correta?

— Se lhe aprouver — continuou al-Flayli —, você pode imaginar que a resposta correta está no círculo, tal como ele foi traçado. Mas, quem há de ser tão embotado a ponto de ser incapaz de imaginar o círculo ideal a que se referem os objetos materiais, de fato? Quem será incapaz de imaginar…

— Papai, chegamos! — gritou Ahmed. Havíamos chegado a uma depressão maior do que a normal entre duas dunas baixas. Os homens da tribo fizeram seus camelos ajoelharem-se, enquanto estes rugiam e grunhiam como se houvessem caminhado mil milhas. Abriram-se sacolas e as tendas foram montadas. Os gritos dos homens perdiam-se na imensidão que nos cercava. Eles acenderam uma fogueira e começaram a preparar a refeição da noite. O sol já estava atrás da duna à esquerda.

Não consigo me lembrar de nenhuma refeição mais deliciosa. Os homens haviam assado carne de carneiro na fogueira e feito uma espécie de molho. Depois das orações vespertinas, o cozinheiro espalhou pedaços de carneiro numa enorme panela rasa de bronze, revestida de uma coisa que parecia pão árabe. Depois, derramou o molho em cima de tudo. Ajoelhamo-nos em círculo em torno da panela, comendo no estilo tradicional.

— Eu queria que você tivesse pelo menos uma ideia da vida numa caravana — disse al-Flayli durante a refeição. — Os árabes… não, que é que eu estou dizendo?… os semitas comeram assim durante muitos milhares de anos, desde os tempos de Abraão, e antes até.

Depois da ceia, a noite escureceu por completo. Sentamo-nos em almofadas ao redor da fogueira, cujo brilho apagava qualquer outra visão fora do hemisfério mágico de sua luz. O menino dos camelos percorreu todo o círculo, carregando um jarro de bronze com o qual derramou uma ablução para cada um de nós. Lavamos a gordura das mãos e vimos a água desaparecer na areia do deserto. Al-Flayli deu uma ordem e os homens apagaram a fogueira.

— Agora, olhe para cima!

Fomos inundados por uma imensa e reluzente majestade, um número maior de estrelas do que eu jamais seria capaz de contar, espalhadas como joias pelo céu. Essas metáforas vinham rapidamente à lembrança diante daquela visão. Numa palavra, era estonteante.

— Agora você está vendo o que os primeiros mercadores viam todas as noites — disse al-Flayli. — Agora sabe porque eles estavam tão familiarizados com o céu e porque deram nomes a tantas estrelas.

— Ahmed — continuou, dirigindo-se ao filho. — Tenha a bondade de recitar os nomes das estrelas.

Al-Flayli inclinou-se para mim: — Refiro-me a todos os nomes árabes, tal como são usados pelos astrônomos atuais. Afinal, poderíamos perguntar: que é “astrônomo”, senão alguém que dá nome às estrelas?

Mais uma vez, Ahmed recitou, satisfeito: — Achernar, Aldebarã [Olho do Touro], Algol, Alioth, Alkaid, Almach, Alnath, Alfaraz, Alphard, Alfeça, Alsuhail, Altair, Antares, Arcturus, Betelgeuse, Caphe, Deneb, Denebola, Dubhe, Etamin, Fomalhaut, Hamal, Kochab, Marfak, Mirak, Mizar, Phecda, Raselage, Rigel, Schedir e Shaula.

Al-Flayli sorriu para o filho e se voltou para mim, erguendo os olhos. — Olhe lá para cima e sinta a magia da grande ilusão. As estrelas são lindas, é claro, e algumas brilham mais do que outras, mas, porventura não residem todas na superfície de uma enorme esfera? Só conseguimos ver metade dela, já que a outra metade está abaixo da linha do horizonte. Mas é claro que se trata de uma esfera. Todo o mundo a vê dessa maneira hoje em dia, inclusive os astrônomos profissionais, que sabem que algumas estrelas estão muito, muito mais longe do que outras. Existem até estrelas brilhantes que estão mais de cem vezes mais distantes do que outras, muito pálidas, que estão próximas de nós. Como você vê, às vezes o conhecimento

intelectual é muito diferente do conhecimento da experiência. A coisa mais difícil do mundo é saber quando deixar um tipo de lado em favor do outro.

— A questão — acrescentou — é que não se pode, por um ato de vontade, pôr de lado essa percepção sumamente natural de que todas as estrelas residem na superfície de uma vasta esfera. Ela está lá em cima, para todo o mundo ver!

— Os antigos — prosseguiu — estavam igualmente convencidos dessa verdade simples e evidente, tanto assim que os gregos afirmavam que as estrelas eram fixas na superfície de uma imensa esfera, para além da qual ficava o Olimpo, a morada dos deuses. Era muito natural que os árabes também vissem essa esfera. Hoje nós a chamamos de esfera celeste, uma ficção prática que só serve para localizar a posição das estrelas no céu, sem nenhuma referência à distância a que elas estão de nós. Ah, as distâncias de nós! Como diz o Alcorão, “Pelas estrelas e seus lugares, ah! se soubesses o que isso significa!” Se isso era um indício, sugerido pelo Alcorão, de que a esfera celeste era uma ilusão, ele passou completamente despercebido dos astrônomos islâmicos.

— A esfera — continuou al-Flayli — era um símbolo da perfeição em três dimensões, assim como o círculo era um símbolo da perfeição em duas. Não era natural que Alá dispusesse as estrelas na superfície de uma esfera? Pois bem, à medida que os antigos astrônomos examinaram mais de perto o céu noturno, eles perceberam que devia haver mais de uma esfera lá em cima. Esse, em minha opinião, foi o início da verdadeira cosmologia. Os planetas, por exemplo, obviamente não pertenciam à esfera das estrelas, pois vagavam livremente à frente dela. Os antigos não apenas sabiam que os planetas deviam estar mais perto, como julgavam também que eles deviam estar numa ou em várias esferas diferentes.

Al-Flayli prosseguiu em sua exposição. — Em consonância com a grandiosidade da criação, portanto, os primeiros astrônomos conjecturaram que cada planeta estava em sua própria esfera. Eles conheciam cinco planetas, de Mercúrio a Saturno, cada um transportado pelos céus em sua própria esfera giratória. O Sol era transportado numa outra esfera, o que somava um total de seis. Em pouquíssimo tempo essas conjecturas transformaram-se numa verdade aceita. Restava aos astrônomos apenas dar conta dos deslocamentos dos planetas, usando tão somente esferas para explicar seus movimentos.

— O interessante nisso tudo — concluiu al-Flayli — é que se trata de algo que representa uma espécie de avanço tateante em direção à verdade. Afinal, era verdade que os planetas não pertenciam à esfera celeste. Eles estão muito, muito mais perto da Terra do que qualquer estrela.

Eu me sentia trêmulo, em parte pela excitação de estar sentado naquele anfiteatro natural das estrelas, em parte por causa do frio cada vez mais intenso. O menino dos camelos trouxe cobertores para todos, bem na hora certa.

— Papai — interrompeu Ahmed —, e a Casa da Sabedoria?

— Depois, Ahmed, depois. Estou falando das esferas celestes e estou prestes a fazer uma observação importantíssima a nosso hóspede. No que concernia aos astrônomos islâmicos, Alá havia feito com que a esfera celeste girasse em torno da Terra uma vez por dia. O problema era atribuir a essa esfera um sistema de coordenadas, para que as posições das estrelas pudessem ser mapeadas com precisão.

— A princípio — seguiu dizendo al-Flayli —, é provável que eles tenham experimentado um sistema horizontal. Para isso, precisavam de dois pontos fixos: o zênite e o norte verdadeiro, como mencionei antes. Essa escolha servia de esteio aos dois ângulos, o de declinação e o do norte verdadeiro. Mas todas as noites, até no mesmo horário, essas estrelas deslocavam-se ligeiramente de suas posições anteriores. À medida que as estações se sucediam, a estrela polar parecia deslocar-se, primeiro para o sul e, depois, novamente para o norte, completando o ciclo num ano solar.

— Como a estrela polar estava no eixo da esfera celeste — continuou al-Flayli —, ela fazia com que a esfera inteira seguisse a mesma progressão anual. Não seria mais natural adotar um sistema baseado nessa observação simples? Concebeu-se um novo sistema equatorial de coordenadas. Nele também havia duas coordenadas. Uma delas era essencialmente a mesma de antes: a declinação, não a partir do zênite, mas de Polaris. A outra medida angular teria que formar um ângulo reto com essa, passando pelo equador celeste, que era um grande círculo no céu correspondente ao equador da Terra.

— A linha de base dessa segunda coordenada — acrescentou al-Flayli — tinha que ser transportada pela própria esfera celeste. Tinha que corresponder a uma das estrelas da esfera celeste. Uma vez escolhido esse ponto, eles passaram a ter um sistema de coordenadas das estrelas que não

se alterava de um dia para outro nem de um mês para outro. As coordenadas continuavam sempre as mesmas.

— Os astrônomos árabes — prosseguiu ele — puderam então compilar um almanaque novo, menor e muito mais simples, com apenas um conjunto de verbetes e nenhuma referência ao horário. Eles também sabiam fazer as conversões de um sistema para outro. Para isso, só precisavam do almanaque mais antigo em relação a duas estrelas: Polaris e a estrela de base da nova coordenada equatorial. Vamos supor que eles quisessem saber em que posição estaria Aldebaran numa dada noite, num dado horário. Assim, procurariam as posições dessas duas estrelas nesse horário no antigo almanaque e, em seguida, procurariam a posição de Aldebaran no novo almanaque equatorial. Depois, só teriam que acrescentar as coordenadas de Aldebaran às das estrelas de base correspondentes do antigo almanaque, e pronto. Se eles erigissem um poste que apontasse para a esfera celeste com essas coordenadas exatas, no horário em questão, o poste apontaria diretamente para Aldebaran.

Al-Flayli tirou uma lanterna do bolso. — Mas, agora, não quero falar das estrelas. Voltemo-nos mesmo para os planetas.

Quando ele acendeu a lanterna, pudemos ver um feixe fino mas bem definido de luz apontar para o céu. Com esse facho, al-Flayli podia rabiscar as ideias no próprio céu, um quadro-negro estrelado. Curiosamente, não importava para que estrela ele apontasse, todos viam o facho apontar para o mesmo lugar. Todos sabiam a que estrela ele se referia.

— Lá está a estrela polar, atrás de nós — disse ele. A lanterna descreveu círculos suaves em torno da estrela polar, círculos que foram-se ampliando até intersectarem a linha do horizonte. — Todos esses círculos representam as trilhas deixadas pelas estrelas no céu, todas as noites.

— O equador celeste é assim — acrescentou. O facho da lanterna partiu de um ponto à nossa direita, percorreu o céu num grande arco e tornou a descer à esquerda, em direção à Terra. — Infelizmente, só posso mostrar-lhes a metade visível do equador celeste. A outra metade fica do outro lado da Terra. E agora, vejam, aqui está uma outra espécie de equador.

Ele fez o facho de luz descrever um círculo ligeiramente diferente, desta vez, enumerando as constelações à medida que avançava: — Escorpião, Sagitário, Capricórnio, Aquário, Peixes, Áries.

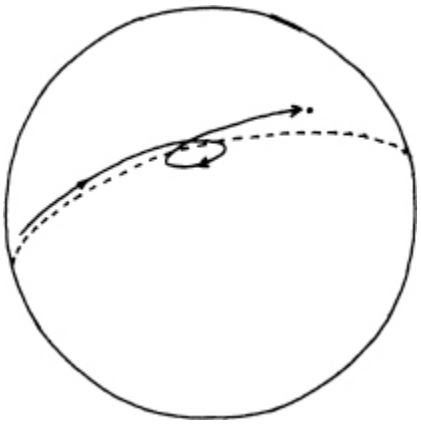
Deteve-se duas vezes no caminho: — Veja, lá está Marte, aquele ponto de luz avermelhado ali. E essa luz leitosa é Saturno.

— Essas são as constelações do Zodíaco — prosseguiu —, assim chamadas porque o Sol e todos os planetas passam por elas no decorrer de um ano ou mais. Na verdade, esse grande círculo é chamado de eclíptica. Ele representa a visão que temos da borda do plano do sistema solar. E, como o Sol e os planetas estão todos nesse plano, eles sempre se encontram em algum lugar da eclíptica, assim como Marte e Saturno podem ser vistos ali esta noite. A eclíptica proporcionou mais um grande círculo, base de mais outro sistema de coordenadas.

— Os planetas — disse ainda al-Flayli — geravam uma renda maravilhosa para alguns dos astrônomos, que também eram astrólogos. Mas geravam também problemas intermináveis para quase todos os esquemas propostos para explicar seus movimentos. Se cada planeta seguia sua própria esfera, havia algo de muito curioso nessas esferas. Muito antes dos árabes, astrônomos gregos como Ptolomeu e Apolônio haviam notado que os planetas, embora se movessem suavemente e um pouco mais a cada noite pela eclíptica, vez por outra descreviam uma volta em sua trajetória, o que era um fenômeno sumamente intrigante.

Al-Flayli deslizou sua lanterna lentamente pelo céu, movendo-a em minúsculos solavancos.

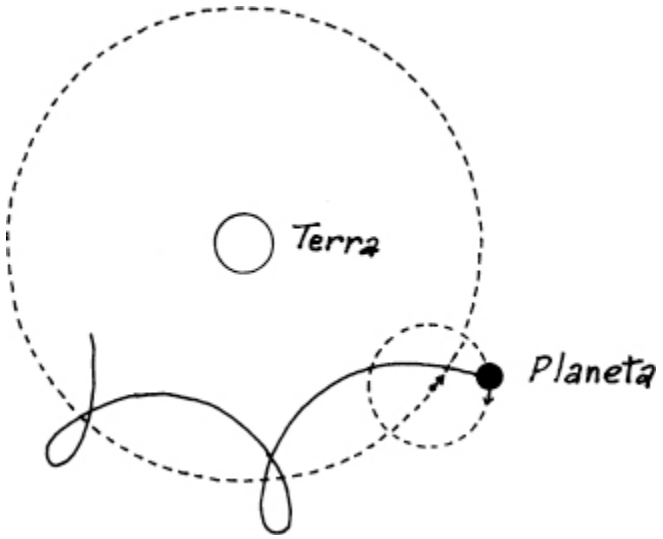
— O que os astrônomos observavam, ao medirem a posição de um planeta em dias ou semanas sucessivos na esfera celeste, era uma trajetória que ora se acelerava, ora ficava mais lenta. Periodicamente, o planeta chegava até a inverter seu curso, descrevendo uma laçada para trás.



A trajetória aparente de um planeta

— No que dizia respeito a Apolônio e Ptolomeu — continuou al-Flayli —, a única maneira de preservar a perfeição do céu era explicar esses estranhos movimentos como resultado de uma segunda esfera, que giraria dentro da primeira. Isso foi chamado de *epiciclo*, e funcionava assim: o que vou traçar agora é a trajetória de um desses planetas, tal como vista de cima do plano orbital. Apenas usarei o céu como uma espécie de quadro-negro celestial.

Al-Flayli desenhou no céu uma trajetória mais ou menos circular, com algumas laçadas. O desenho traçava o efeito de uma esfera girando dentro de outra, o que me fez lembrar os diagramas de epiciclos dos textos antigos.



Planeta movendo-se em epiciclos

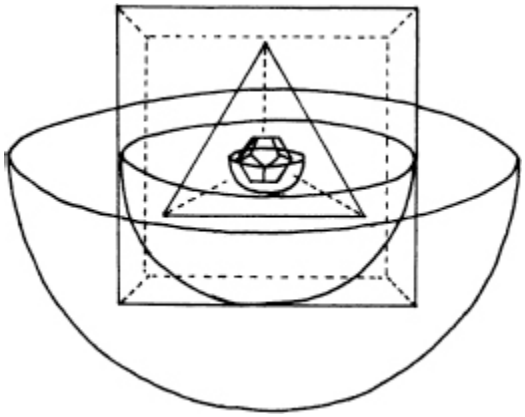
— Quando os matemáticos islâmicos calcularam os efeitos desse movimento em suas esferas celestes — disse ele —, as trajetórias resultantes concordaram de perto com o que eles observavam, pelo menos num número suficiente de casos para convencê-los de que a teoria de Ptolomeu estava certa. Na verdade, Ptolomeu fazia parte do saber que eles haviam recebido dos gregos. Havia tantas outras coisas claramente verdadeiras, para não dizer maravilhosas, na ciência grega, que eles não tinham muita razão para questionar a teoria ptolemaica.

— Essa teoria — continuou al-Flayli — foi dominante por mais de mil anos. Só em meados da era islâmica, por volta do século XII, foi que os astrônomos muçulmanos começaram a questionar a teoria ptolemaica. Eles perceberam um grande número de discrepâncias em relação a suas

observações. Al-Tusi, astrônomo-chefe do observatório de Maragha, deixou de confiar no sistema ptolemaico e propôs um novo sistema, de sua própria autoria, mas que era, essencialmente, uma variação da teoria dos epiciclos. O astrônomo espanhol ibn Aflah criticou publicamente a teoria de Ptolomeu, tal como fizeram outros. Eles sabiam que havia algo errado, mas não conseguiam discernir bem o que era. Somente durante o Renascimento europeu foi que os astrônomos descobriram a verdadeira situação.

— A chamada revolução copernicana — prosseguiu al-Flayli — consistiu numa proposta que colocou o Sol no centro do cosmo, com a Terra e os outros planetas girando em torno dele em órbitas circulares. As esferas celestes produziram pouca música, talvez apenas um leve tilintar de vidro partido, ao se desintegrarem na mente dos homens.

— A rigor — observou al-Flayli —, Copérnico não foi o verdadeiro pai da chamada revolução. Este foi, antes, um padre alemão de nome Johannes Kepler. A princípio, Kepler mais ou menos ignorou a teoria copernicana. Trabalhou durante muitos anos no problema de determinar os tamanhos das esferas que transportavam os planetas ao redor da Terra. Acabou topando com um esquema de grande concisão e beleza. Cada esfera era determinada por um dos chamados sólidos platônicos, indo do cubo ao tetraedro, depois ao dodecaedro e assim por diante.

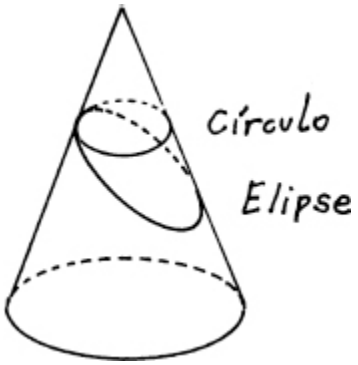


O Mysterium Cosmographicum

Al-Flayli continuou: — Ele sentiu uma emoção quase mística diante dessa descoberta, achando que havia penetrado no próprio cerne do cosmo. Kepler, como você sabe, era pitagórico, e era um vigoroso adepto da ideia de que a resposta última do enigma dos movimentos planetários estaria na

matemática. Para ele, esse era um dogma tão poderoso quanto suas convicções cristãs.

— Mas os movimentos reais dos planetas não se encaixavam nesse esplêndido esquema — prosseguiu al-Flayli — e, com certa relutância, Kepler o abandonou. Só então foi que se voltou novamente para Pitágoras, em busca de inspiração. O círculo proposto por Copérnico, junto com uma das secções cônicas, não tinha sido um sucesso. Após muitos anos de cálculos penosos, durante os quais ele quase morreu de fome, Kepler finalmente deparou com a ideia de experimentar uma outra secção cônica, a elipse.



Duas secções cônicas

— Havia muitos cálculos a fazer — comentou al-Flayli — enquanto ele comparava os dados reais dos planetas com as previsões de uma teoria que os fazia descreverem elipses em torno do Sol, e não da Terra. A correspondência foi empolgantemente boa. Provavelmente, o próprio Pitágoras ficaria radiante.

— Não nos esqueçamos — lembrou al-Flayli — de que toda a importância da revolução copernicana residiu na revelação do erro. Os astrônomos anteriores haviam errado. É verdade que uma visão de mundo substituiu outra, mas a segunda foi menos movida pelos desejos dos homens do que a primeira. O Renascimento libertou-os da necessidade de preservar a estrutura esférica dos céus. Como eu expliquei, alguns astrônomos islâmicos já sabiam muito bem que o modelo ptolemaico estava simplesmente errado. Mas não podiam, por um simples ato de vontade ou de imaginação, conceber o modelo correto, pois isso significava abandonar ideias longamente acalentadas sobre o movimento celeste. Se você quiser dizer que a cultura influencia a ciência, não vou discutir. Entretanto, por

mais paradoxal que pareça, somente a possibilidade de errar é capaz de salvar a ciência de se tornar um exercício puramente cultural.

— A revolução copernicana, na verdade — disse ainda al-Flayli —, foi uma operação de resgate, mediante a qual um modelo superior, que hoje sabemos ser correto, substituiu um modelo incorreto, inspirado na ilusão esférica dos céus e desde então preservado por influências puramente culturais. Não se esqueça de que o cosmo já não está distante de nós. Estamos lá todos os dias, em nossas naves espaciais, calculando órbitas com a precisão de um encontro a menos de um metro de distância, depois de uma viagem de centenas de milhares de quilômetros. Isso simplesmente não seria possível, se a visão moderna da dinâmica cósmica estivesse seriamente equivocada sob algum aspecto.

— Papai — Ahmed tornou a interromper —, você disse que terminaria…

— Sim, Ahmed. Já é chegada a hora. Se nosso hóspede não fizer nenhuma objeção, voltaremos à Casa da Sabedoria. Estamos no ano de 926 d.C., o ano 211 da era islâmica. Al-Kuarizmi encontra-se no pátio da Bayt al Hiqma com o califa al-Ma'mun. As estrelas brilham no céu e o califa está deslumbrado. "Dize-me, ó Sábio", dirige-se ele a al-Kuarizmi, "quando os filósofos declaram 'Tal como acima, assim é abaixo', que querem eles dizer?" Al-Kuarizmi responde: "Muitas coisas, ó Sombra de Alá. Ilustrarei apenas uma. Lá ao norte vedes a estrela polar, al-Qutb, em torno da qual giram os céus todas as noites. Como pode ver Vossa Eminência, os céus dispõem-se como uma vasta esfera, de acordo com o plano divino. Tal como acima, assim é abaixo.

"Desse princípio, ó Califa, vemos uma ilustração apropriada bem aos nossos pés: se os céus são uma esfera, também a Terra o é. Medimos o ângulo de al-Qutb, aqui em Bagdá, como sendo de 33 graus e 19 minutos acima do horizonte norte, no início da primavera. Já em Meca, onde se encontra a Casa de Alá, medimos 21 graus e 33 minutos na mesma época do ano. Ora, por que haveria tamanha discrepância? Ao seguirmos de Bagdá para Meca, o ângulo de al- Qutb modifica-se em quase 12 graus do arco. De que outro modo explicar isso, senão admitindo que vivemos numa esfera, reflexo do próprio céu? Ao atravessarmos as terras e observarmos o polo, ele se reduz sucessivamente nos graus de latitude, por menores que sejam, que atravessamos a cada dia. Certamente, vivemos numa esfera, nós… Ahmed! O que foi? — gritou al-Flayli, de repente.

Ahmed afastava-se engatinhando em direção às tendas.

— Não posso olhar para cima, papai. Tenho que entrar — respondeu Ahmed, angustiado.

— É concedida a algumas pessoas a capacidade de se livrarem da ilusão da abóbada. Ahmed é uma delas. Às vezes, ao olhar para cima, ele não vê a abóbada, mas as profundezas do espaço. É uma percepção desmedidamente assustadora. Talvez seja hora de todos nos recolhermos.

Com isso, segui em direção às tendas, enquanto al-Flayli e os outros faziam sua prece noturna. Ahmed não saiu para se juntar a eles, preferindo, em vez disso, orar em sua tenda.

---

a Na lista que se segue, nem todos os termos têm tradução em português (donde as notas subsequentes) e nem todas as traduções existentes resultam em vocábulos que tenham, também em nossa língua, origem árabe, persa etc. Ficam de fora, por outro lado, inúmeras palavras que têm essa proveniência na língua portuguesa. (N.T.)

b Tipo de embarcação a vela, com um só mastro, usada em regiões banhadas pelo oceano Índico. (N.T.)

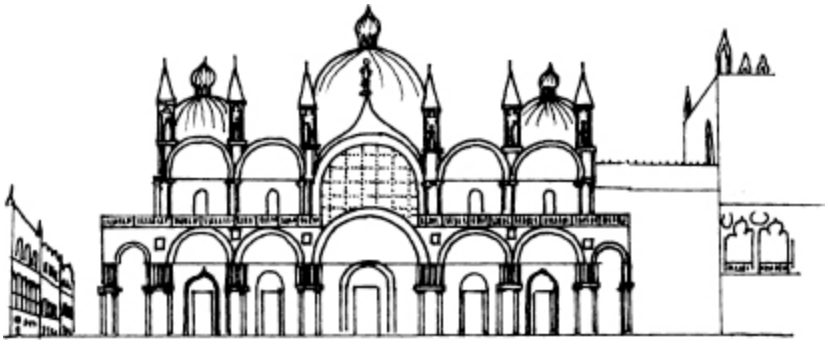
c No folclore muçulmano, espírito maléfico que viola sepulturas e devora os cadáveres; no inglês, o termo passou também a designar, na linguagem figurada, os ladrões de sepulturas ou as pessoas que se comprazem com atos horripilantes. (N.T.)

d Também no folclore muçulmano, espírito que pode assumir forma animal ou humana e influir na vida humana. (N.T.)

e Pó cosmético usado no Oriente para escurecer as pálpebras. (N.T.)

PARTE III

UM NÚMERO DE DESAPARECIMENTO



CAPÍTULO 5

A MENSAGEM

Veneza, Itália, 26 de junho de 1995

Despedi-me de al-Flayli na pista do aeroporto de Ácaba. Pouco antes de eu embarcar num bimotor de aparência ameaçadora, em direção à cidade do Cairo, ele disse uma coisa muito curiosa. — Não estou certo de que você se aperceba da importância de sua busca. Na filosofia da ciência, ou na prática da ciência, na verdade, não há consideração mais importante do que essa.

Ponderei sobre essas palavras enquanto o avião sobrevoava o deserto do Sinai e o canal de Suez, até pousar no movimentado aeroporto do Cairo, onde eu tomaria outro avião com destino a Veneza. Sentado em meio a uma fileira de malas em que se sentavam diversas mães com seus bebês, tive tempo para recobrar o fôlego, filosoficamente falando. Que havia aprendido em minha visita a Ácaba?

Embora fosse verdade que as provas, como quer que se apresentassem, vinham-se acumulando a favor da existência independente da matemática e da realidade de sua descoberta, eu havia deparado pela segunda vez com o que se poderia chamar de um grande fracasso. Pitágoras havia achado que todas as distâncias eram comensuráveis, e depois descobrira estar errado. O segundo exemplo de fracasso, a esfera celeste, não era realmente um fracasso matemático, mas científico. Todos os antigos astrônomos, provenientes de muitas terras e culturas diferentes, tinham considerado que as estrelas eram fixas numa esfera giratória. No fundo, essa opinião (dificilmente se poderia chamá-la de hipótese) resultava, com certeza, de uma poderosa ilusão de ótica. Todas as culturas — inclusive a Europa medieval e cristianíssima — tinham visto suas crenças fundamentais materializarem-se na esfera celeste. Aliás, em cada um desses casos, o papel da cultura parece ter sido o de reforçar a ilusão.

Havia ironias em meio a essas correntes cruzadas da matemática e da cultura. Até ali, longe de produzir diferenças, a cultura parecia ter produzido semelhanças, quer uma teoria estivesse certa ou errada. Além disso, como era irônico que Kepler, um pitagórico confesso, tivesse sido a pessoa a descobrir, finalmente, o movimento dos planetas! Antes dessa descoberta, porém, até Kepler tinha feito uma última e apaixonada tentativa com as esferas, acabando por se regozijar com a visão de um *mysterium cosmographicum* em que as esferas se transformavam em sólidos platônicos transparentes, aninhados em torno de uma Terra central e estática. De qualquer modo, a observação não se havia compatibilizado com o movimento esférico (isto é, circular), fosse ele em torno de esferas ou de sólidos platônicos. Tampouco havia concordado com as previsões do movimento epicíclico. Mas concordara perfeitamente com as novas leis keplerianas. E isso não podia acontecer por acaso.

Essas ideias ganharam tamanha força, que mal reparei no voo sobre o Mediterrâneo, pousando no aeroporto de Veneza com um novo sentimento de expectativa. Que coisas estranhas e maravilhosas eu haveria de aprender com meu novo contato, Maria Canzoni, da Università Ca'Foscari di Venezia.

Canzoni não estava no aeroporto para me receber. Em vez disso, descobri meu nome, grafado de maneira bastante estranha, adornando um cartaz que era agitado acima da multidão reunida junto ao portão de desembarque. Quem o segurava era um rapaz que se apresentou como Emilio, aluno de Canzoni. Ele conversou animadamente enquanto rodávamos pela pista estreita que leva à antiga cidade de Veneza, aparentemente flutuando sobre o mar Adriático. A água parecia suja.

— Essa água é limpa? — perguntei.

Emilio me olhou como se eu viesse de Marte. — Se cair ali, o senhor está morto — respondeu, rindo. Estacionamos o carro e pegamos um táxi aquático para a universidade.

Canzoni era jovem, com os cabelos prematuramente grisalhos e um jeito gracioso, quase reservado. Apesar da timidez, apertou minha mão e a segurou enquanto explicava sua grosseria de não haver aparecido no aeroporto.

— Tivemos uma reunião do comitê. Era sobre dois novos alunos da pós-graduação, qual deles aceitar e qual rejeitar. Uma tarefa penosa. Era para ter

terminado duas horas atrás. E como foi sua viagem? Já esteve em Veneza antes?

— Foi ótima, obrigado, e não. Eu não fazia ideia de como é surpreendente e linda esta cidade. Você tem sorte de morar aqui.

— É — disse ela, em tom displicente. — Muita sorte.

Entramos num palácio reformado, onde Canzoni tinha um escritório. A porta da frente dizia: “Dipartimento della Historia”. Ela pareceu relaxar ao sentar-se em sua escrivaninha. Puxei uma cadeira suntuosa, sentei-me e, na mesma hora, dei um bocejo. Foi minha vez de me desculpar, explicando que eu havia passado a noite anterior acampado no deserto.

— Ora, que excitante! Que sorte a sua! O deserto é muito mais animado do que este lugar, eu acho. E sua viagem ao deserto foi em busca da razão de a matemática ser tão poderosa?

Comecei a lhe contar sobre al-Flayli e al-Kuarizmi, à menção de cujo nome Canzoni sorriu e inclinou o corpo para a frente, como se fosse confiar-me um segredo.

— Estou certa de que você sabe que foi desse nome que recebemos a palavra *algoritmo*.[a] Ela costumava significar apenas “métodos de cálculo com números”. Foi apresentada à Europa e à Itália por Leonardo di Pisa, também conhecido como Fibonacci. Ele não era realmente matemático, não a princípio, pelo menos, mas um comerciante que trabalhava para o pai. Viajava com frequência ao Cairo, a Túnis, a Argel e a outros portos do norte da África. Ficou impressionado com a habilidade de seus equivalentes árabes no cálculo de conhecimentos de embarque, preços, valores e até pesos e medidas. Os métodos deles pareciam especialmente eficientes, quando comparados ao canhestro sistema romano que ainda era usado na Europa medieval.

— Ele convenceu seus contatos comerciais — continuou Canzoni — a lhe ensinarem essa arte numérica, e revelou-se um aluno competente. Para ser completamente sincera, é possível que ele não tenha sido motivado apenas pela ideia nobre de disseminar ideias úteis, mas também pela de ver seu nome transformar-se numa palavra conhecida. Resolveu escrever um livro, que se tornaria uma leitura indispensável para todos os comerciantes, todos os banqueiros, todos os coletores de impostos e até todos os monges! Ele sabia que atingiria seu objetivo se escrevesse bem e com clareza, usando muitos exemplos de toda sorte. O livro que escreveu chamou-se

simplesmente *Algorismus*, com um título em latim para dar o tom, digamos, sugerindo um mistério.

Canzoni deu um sorriso tristonho, como quem se lembrasse de uma felicidade desaparecida há muito tempo. — Será que mencionei, em algum dos *e-mails* que lhe escrevi, que eu comecei minha carreira como física? Minha formação tornou ainda mais interessantes as suas perguntas sobre a realidade da matemática. Quem, senão um físico, trabalha diariamente com um pé em cada um desses mundos, o físico e o matemático? Saber da sua visita fez-me pensar com um empenho extra, e talvez eu tenha uns bons exemplos para você.

Ela me contou sobre sua época nas grandes instalações de pesquisa de partículas do CERN, em Genebra, o centro da física europeia. Enquanto vasculhava seus livros e papéis à procura de exemplos do poder absurdo da matemática na física, ela sem querer começara a reviver aquela fase de sua vida. Tive a impressão de que alguma coisa lhe havia acontecido no CERN, alguma coisa que a havia afastado. Ou teria ela ido para Veneza não como fugitiva, mas como peregrina? Estaria apenas com saudade de alguma coisa?

— Eu me proponho apresentar-lhe uma espécie de número de desaparecimento, no qual, ao examinarmos cada vez mais de perto a realidade física, ela vai sumindo gradativamente, sendo substituída por uma coisa bem diferente. É, bem diferente! — acrescentou com um suspiro.

Da maneira mais enfática possível, sugeri que ela podia começar a me falar disso.

— Você terá que me permitir uma espécie de preparação. Pode me perguntar diretamente se a matemática tem vida própria, ou pode disfarçar a pergunta, fingindo que é uma questão de descoberta versus invenção. Mas elas são uma mesma pergunta! E como poderiam deixar de ser? Se você fizer esse tipo de pergunta, responderei descrevendo o grande número de desaparecimento. Mas, por favor, você tem que me permitir outros exemplos, caso minha grande tese não o satisfaça.

Enquanto falava, ela ia juntando algumas coisas e colocando-as em sua pasta. Aparentemente, íamos sair para jantar. Eu estava faminto.

— Depois do jantar, hoje à noite, às 7:30, haverá um recital especial de Gabrieli na Igreja de San Marco. (Pensei comigo mesmo: o que poderia ser uma apresentação melhor ao próprio espírito de Veneza do que ouvir a

“Missa Sancta” de Gabrieli?) Será apresentado na própria igreja em que ele trabalhou como organista e mestre do coro.

Dizem que as pedras de Veneza têm um cheiro adocicado que lhes é próprio. A maioria dos turistas reclama do mau cheiro dos canais, e um certo odor úmido de frutas pareceu acompanhar-nos na caminhada até Rialto, com sua ponte coberta. Espremendo os olhos até quase fechá-los, todas as pessoas me pareceram transformar-se, exibindo uma roupagem medieval: comerciantes, corretores, vendedores ambulantes, mascates, investidores e suas damas. Era o mundo de Fibonacci, recém-acelerado pela introdução do *Algorismus*.

Subimos uma escadaria e vimo-nos em meio aos aromas deliciosos de um pequeno e esplêndido *ristorante*, escondido no segundo andar de um prédio antigo, com um *terrazzo* que dava para um dos pequenos canais. Não víamos o Adriático do *ristorante*, mas podíamos sentir sua brisa cálida e úmida soprando pelo desfiladeiro medieval que nos cercava. Jantamos camarões graúdos e mexilhões, espalhados sobre uma massa saborosa, recoberta de creme. Assim que o garçom recolheu os pratos, Maria abriu sua pasta e retirou vários papéis.

— Antes de irmos para San Marco, temos apenas tempo suficiente para discutir alguns assuntos pertinentes a suas perguntas. Um dos melhores exemplos que encontrei foi o trabalho de um matemático suíço chamado Balmer — concluiu, entregando-me um artigo.

— E o trabalho dele é exemplo de quê? — perguntei.

— Ele demonstra como a matemática é inerente à matéria. Pode-se dizer que esse exemplo mostra que a matemática, como entidade, é pelo menos tão real quanto o chamado mundo real, ou talvez até mais do que ele.

Dei uma espiada no artigo, enquanto Canzoni chamava o garçom.

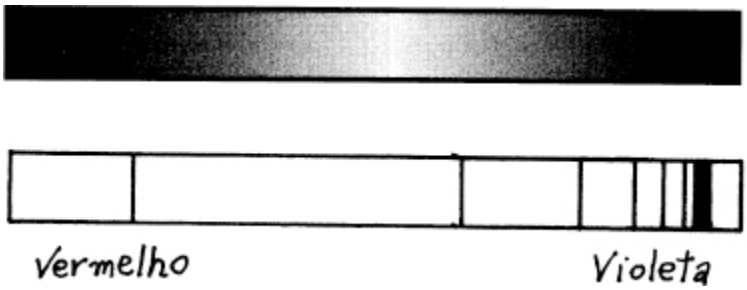
A PROVÁVEL FORMA DE SOLUÇÃO DE BALMER
PARA O ENIGMA DA SÉRIE DO HIDROGÊNIO

Maria Canzoni,
Depto. de História da Ciência
Università Ca’Foscari di Venezia
Veneza, Itália

RESUMO
Em 1884, Johann Jacob Balmer era professor de uma escola para moças em Basileia, na Suíça. Formado em física e ótimo físico, Balmer nunca havia conseguido galgar os degraus acadêmicos além da posição de *privatdozent* [tutor] na Universidade de Basileia. Em 1884, entretanto, fez

algo realmente espantoso. Fazia meses que ele meditava sobre certas observações comunicadas por Ångström. Essas observações assumiam a forma de quatro números de 6 algarismos em cujos comprimentos de onda Ångström havia medido linhas estranhas no espectro do gás de hidrogênio. Os físicos da época consideravam realmente notável que o hidrogênio só absorvesse e emitisse energia em comprimentos de onda específicos. Balmer descobriu uma fórmula de duas variáveis com valores que correspondiam a esses comprimentos de onda, ficando dentro da faixa de erro experimental relativo de 1/7.000. A existência de uma fórmula para as linhas espectrais distintas do átomo de hidrogênio levou diretamente à descoberta dos estados quânticos da matéria.

Eu compreendia boa parte disso. Anders Ångström fora um físico sueco e uma das primeiras pessoas a utilizarem um novo instrumento, chamado *espectrógrafo*, que decompunha a luz num arranjo ou espectro das cores que a compunham, como um prisma. Cada cor do espectro representava luz com um comprimento de onda específico. Os cientistas haviam esperado que todos os espectros viessem a ser mais ou menos como a luz solar comum, composta de uma faixa contínua de comprimentos de onda. Ångström e outros físicos tinham ficado muito intrigados ao examinarem a luz emitida por certos gases quentes, como o hidrogênio. Em vez de um espectro contínuo e borrado, eles depararam com linhas descontínuas, com comprimentos de onda específicos.



Espectros do Sol (acima) e do hidrogênio (abaixo)

Como a maioria das pessoas sabe, a luz solar, que parece branco-amarelada, compõe-se de um arco-íris quase contínuo de comprimentos de onda, desde o infravermelho até o ultravioleta e mais até. Em contraste, o gás de hidrogênio não exibe esse arranjo espectral contínuo. Quando aquecido, tem uma cor característica, que é um matiz estranho de violeta. Quando essa cor é vista no espectrógrafo, constata-se que ela se compõe de linhas descontínuas, uma para cada comprimento de onda que integra a cor. Posteriormente, descobriu-se que cada comprimento de onda provinha de um estado de vibração diferente dos átomos de hidrogênio em seu gás.

A fórmula de Balmer reproduziu os comprimentos de onda do hidrogênio agitado. Usou duas variáveis inteiras, n e m, que assumiam, independentemente, valores pequenos, como 1, 2, 3 etc., produzindo todos os números encontrados por Ångström e mais alguns. Continuei a folhear o artigo de Canzoni e encontrei a fórmula. Sem dúvida ela lhe daria uma explicação mais completa.

Maria inclinou-se para a frente, meio ansiosa. — Você encontrará uma tabelinha importante na página 37 — disse. Fui para essa página e encontrei as medidas originais de Ångström:

$H_\alpha = 6562.10$
$H_\beta = 4860.74$
$H_\gamma = 4340.10$
$H_\delta = 4101.20$

Canzoni explicou sua significação. — Os comprimentos de onda eram indicados nas unidades que, mais tarde, passariam a levar o nome de Ångström: um centésimo milionésimo de metro. Os números eram os comprimentos de onda das quatro primeiras linhas do espectro do hidrogênio, tal como medidas por Ångström, que tinha a reputação de fazer um trabalho extremamente preciso. Balmer estava convencido de que os números tinham uma interpretação muito especial, que confirmaria a escola filosófica a que ele pertencia.

Lancei um olhar intrigado a Canzoni. Se tivesse alguma ideia do que ela diria a seguir, não teria bebido um gole tão grande de meu Brio Supremo.

— A escola de Pitágoras — disse ela.

Maria pareceu sumamente preocupada quando comecei a tossir e a emitir chiados, lutando desesperadamente para expelir a bebida dos pulmões. Os ocupantes das outras mesas olharam-nos, intrigados. Quando me recuperei o suficiente, expliquei como aquele nome havia surgido em minhas duas visitas anteriores. Na mesma hora, Canzoni quis saber mais sobre ambas. Interessou-se particularmente por Pygonopolis, batendo palmas quando falei no holos.

— Tenho que pegar o endereço dele com você! — exclamou. — É importante termos um nome para esse lugar e, nas questões clássicas, nós, italianos, frequentemente temos que nos curvar aos gregos! Holos, holos,

holos! Gosto mais disso do que de Mundo Platônico. O holos e o cosmo. Lindo!

Quando terminei de explicar as ideias de Pygonopolis e al-Flayli, mal chegando a esboçá-las, já eram quase oito horas.

— Vamos, vamos, vamos — disse Canzoni, que talvez tivesse bebido um pouquinho mais de vinho do que lhe seria conveniente. Tomamos um barco-táxi no canal ao lado do restaurante. O vento lhe agitava os cabelos enquanto olhávamos as cenas animadas das gôndolas e dos barcos a motor. Ela se voltou para mim com um sorriso solene.

—Você tem razão. Não há na Terra nenhuma cidade com metade da beleza desta.

Na Piazza San Marco, andamos até a magnífica igreja medieval, mas só encontramos lugares em pé em seu interior. O concerto já havia começado, de modo que ficamos na parte dos fundos da igreja, ouvindo o majestoso kyrie reverberar de um santo para outro na altiva abóbada dourada. Canzoni fez um sinal para sairmos, dizendo duvidar que conseguisse ficar de pé por tanto tempo. Ela sofria de *scleroso*, o que de repente percebi que significava "esclerose múltipla". Sentada num banco do lado de fora, ela ouviu atentamente a música que fluía da antiga igreja.

— É linda, mas tenho que lhe dizer uma coisa — sussurrou. — Esse tipo de música foi a perdição da Igreja.

— Eu imaginaria justamente o contrário! — comentei.

— É que hoje em dia não entendemos a religião como eles a entendiam na época medieval. Veja, ao expressar a reverência religiosa de uma pessoa, a de Gabrieli, nesse caso, essa música tornou os fiéis dependentes dela, retirando-lhes sua própria música interna, por assim dizer. Em vez de acender velas espirituais, a música as apagou. Essa ideia, que me sinto obrigada a compartilhar com você, por alguma razão, não é sustentada por quase ninguém atualmente, mas está lá, na origem, na inquietação que os Padres da Igreja manifestaram. Compare a riqueza que brota daquela porta com a simplicidade e a pureza de um canto gregoriano.

O comentário dela sobre a religião fez-me lembrar Pitágoras e os pitagóricos. A revelação dos estudos pitagóricos de Balmer me deixara realmente atônito. Minha busca havia destacado um *leitmotif* que se recusava a desaparecer. Encontrar Pitágoras no ano 500 a.C. era uma coisa, mas tornar a encontrá-lo na Irmandade da Pureza do Oriente Médio em 900

d.C., vê-lo reaparecer no século XVI de Kepler e voltar a encontrá-lo no século XIX de Balmer era surpreendente, para dizer o mínimo. Senti-me forçado a perguntar: — O que você sabe sobre os pitagóricos?

— Os pitagóricos eram místicos, tecnicamente falando, com uma cadeia de iniciação que remontava a Pitágoras. Na verdade, é provável que remontasse a épocas ainda mais remotas, a Tales e a seu mestre, um personagem misterioso que se chamava Berossus da Babilônia.

— Para ser franca — observou —, pouco sabemos além disso sobre as práticas ou as doutrinas dos pitagóricos, mas eles acreditavam que a contemplação do mundo platônico, o holos, fazia-os aproximarem-se da "Fonte Não Criada", disso que hoje chamamos divindade. Só dispomos de alguns indícios tantalizantes de como a seita funcionava. Eles se vestiam de branco, por exemplo. Faziam votos de pureza e retidão. Tinham uma estrela azul tatuada na palma da mão direita; prestavam um juramento de segredo sobre todas as questões doutrinárias e eram proibidos de comer favas, e assim por diante. Nosso conhecimento consiste em pequenos fragmentos, como esses.

Perguntei-me em voz alta se teria havido uma espécie de seita pitagórica funcionando na Basileia do século XIX.

— Francamente, duvido — disse Maria. — Provavelmente, Balmer era um romântico que encontrou nas descrições de Pitágoras e dos pitagóricos um reservatório de seus próprios sentimentos a respeito da física e da matemática, assim como da relação entre elas.

— Isso devia significar — continuou — que Balmer era sumamente atento a teorias físicas que pudessem basear-se em inteiros ou razões entre inteiros. Como pitagórico, mesmo sendo romântico, ele acreditava muito que, um dia, todas as teorias físicas seriam baseadas nos inteiros. Em suma, acreditava que o cosmo era descontínuo, separado em unidades fundamentais que refletiam uma estrutura correspondente do holos. Como é útil essa palavra! Maria prosseguiu: — Com a ascensão do átomo daltoniano, como uma pequena esfera dura, e com sua subsequente elaboração por Rutherford e Dirac, que o decompuseram em outras estruturas descontínuas, como os núcleos e os elétrons, Balmer viu confirmada a sua visão das coisas. Um universo descontínuo começava a fazer sentir sua presença. Mas, enfim, eu estou me adiantando. Falarei muito mais desses avanços amanhã.

— Na década de 1890 — Maria retomou o fio da meada —, o espectrógrafo havia revelado um novo mundo de comprimentos de onda. O mais interessante de tudo era a luz emitida pelos gases quentes de vários tipos de átomos excitados. Invariavelmente, eles não mostravam arco-íris contínuos, digamos, mas apenas algumas linhas, alguns comprimentos de onda que caracterizavam os átomos em questão. Esses espectros eram chamados de *espectros de emissão*, porque decompunham a luz emitida pelos átomos. Havia também os *espectros de absorção*: se você olhasse para uma fonte luminosa, como o Sol, através de um gás com uma composição atômica específica, veria linhas escuras nas posições dos mesmos comprimentos de onda que veria no espectro de emissão do mesmo gás.

— Isso significava – continuou Canzoni — que era possível detectar toda sorte de elementos nas estrelas distantes, ou mesmo nas próximas, como o Sol. Embora as linhas do hidrogênio ficassem mais ou menos perdidas em meio à riqueza das outras linhas num espectro solar, essencialmente no arco-íris, ainda assim era possível identificar gases como o hidrogênio, filtrando a luz solar pelo gás de hidrogênio. O surgimento de linhas escuras de hidrogênio em alguns espectros estelares e solares, por exemplo, só podia significar que havia hidrogênio presente nesses corpos. Se aqueles comprimentos de onda não eram emitidos pela fonte, como poderiam ser absorvidos?

— Assim — prosseguiu ela —, quando os astrônomos examinaram estrelas brilhantes, como Altair ou Deneb, através do novo instrumento, surpreenderam-se ao descobrir grandes quantidades de gás de hidrogênio. Diversos físicos começaram a medir essas linhas com muito cuidado, mas nenhum deles mais cuidadosamente do que Ångström. Na verdade, as medições que ele fez dos comprimentos de onda foram espantosamente exatas, com um erro relativo menor do que 1/7.000. Ångström publicou seus resultados e muitos cientistas se intrigaram com os números misteriosos que emanavam das estrelas.

— Quando os olhos de Balmer bateram nos números que Ångström extraíra do cosmo com tanto cuidado — disse ainda Maria —, ele se voltou para o holos em busca de inspiração. À primeira vista, parecia que os comprimentos de onda descobertos por Ångström seriam irracionais, contendo um número infinito de algarismos, mas a confiança pitagórica de

Balmer não vacilou. Certamente, teria de haver inteiros naquelas misteriosas mensagens estelares de seis dígitos!

Era óbvio que Canzoni estava-se encaminhando para a solução balmeriana do enigma. Eu não disse nada, deixando-a falar, mas me perguntei como alguém poderia arrancar inteiros de números de aparência tão obscura como aqueles, sem recorrer a artimanhas matemáticas.

— Não há dúvida de que Balmer experimentou muitas abordagens — disse ela. — Por exemplo, é provável que tenha tentado extrair diretamente as razões dos números dos comprimentos de onda. Primeiro, vamos listar os quatro números com que Balmer trabalhou, tais como foram recebidos de Ångström. O espectro do hidrogênio, você sabe, compunha-se de uma linha principal ou alfa (H_α), na região vermelha do espectro, uma linha secundária beta (H_β), na violeta, uma terceira linha, gama (H_γ), uma quarta, delta (H_δ), e assim por diante. Em frequências cada vez mais altas, como você viu no diagrama, as linhas se juntavam mais e mais. São estes, portanto, os quatro primeiros números que Ångström publicou.

Ela tornou a apontar para o texto de seu artigo:

$H_\alpha = 6562.10$
$H_\beta = 4860.74$
$H_\gamma = 4340.10$
$H_\delta = 4101.20$

Disse então: — Ao extrair a razão dos dois primeiros números, Balmer notou uma coisa muito interessante:

6562,10/4860,74 = 1,350020779

Havia dois zeros à direita, depois das duas primeiras casas decimais. E se o 1,35 fosse importante, enquanto a parte do “0020779” se devesse a erros de observação esperados por Ångström? Assim, Balmer reescreveu a parte 1,35 como uma fração:

135/100, ou, em forma reduzida, 27/20.

Eu não a estava acompanhando, de modo que interrompi para perguntar: — Mas, o que foi que levou Balmer a extrair a razão dos números dos comprimentos de onda?

Ela me olhou com ar de dúvida, como se aquela fosse uma pergunta tola, e disse: — A primeira coisa que se precisa fazer é eliminar quaisquer fatores comuns obscuros, especialmente os que possam ser irracionais ou complicados de alguma outra maneira. Por exemplo, o número irracional pi é 3,14159, calculando-o até a quinta casa decimal. Ora, 2 vezes pi são aproximadamente 6,28318, enquanto 3 vezes pi são 9,42477. Se você extrair a razão desses dois números, chegará a 2/3, ou seja, na verdade, um número racional.

— Pois bem — prosseguiu ela —, quando Balmer extraiu outras razões entre quatro números, como H_α a H_δ, a mesma coisa aconteceu. Ele chamou esse fator comum de *b* e o descreveu como "o número fundamental do hidrogênio". Depois de eliminar *b*, no entanto, que tipo de números restava? Seriam inteiros simples, ou razões entre inteiros, quem sabe? Afinal, se você extrair a razão de um conjunto de razões, ainda terminará com uma razão.

Tive que refletir um pouco para perceber que ela estava certa, é claro. Por exemplo, para perceber que a razão entre 3/4 e 8/5 é simplesmente a fração

$$\frac{3/4}{8/5}, \text{ que é igual a } \frac{3 \times 5}{8 \times 4}, \text{ que é } \frac{15}{24}, \text{ outra razão.}$$

Nesse momento, a música que vinha de San Marco parou e, logo depois, uma multidão de pessoas saiu da igreja e começou a passear pela praça. Era a hora do intervalo.

— Como eu ia dizendo — continuou Maria —, Balmer provavelmente tentou descobrir os inteiros que havia nesses números, primeiro presumindo que cada um dos números de Ångström tinha a forma *bm*, onde *b* é o número fundamental do hidrogênio e *m* é um inteiro. Mas ele não chegou a parte alguma com essa abordagem. Evidentemente, estava lidando com razões de razões. No processo de descobrir quais eram essas razões, é bem possível que ele tenha procedido presumindo que cada uma das medidas de Ångström tinha a mesma forma geral:

$b(n/d)$,

onde *b* é o número fundamental e *n/d* é a razão que há nessa medida. Aqui, *n* representa o numerador e *d* representa o denominador.

— Ora — acrescentou ela —, podemos usar a álgebra como uma espécie de microscópio, para ver o que acontece na situação geral. Aqui estão dois desses números, com seus componentes subscritos a fim de distingui-los. Montei a razão entre eles:

$$\frac{b(n_1/d_1)}{b(n_2/d_2)}$$

— A álgebra nos diz — continuou Maria — que, quando extraímos a razão desses números, os fatores *b* se anulam e resta a razão das razões, que se resume, nessa forma geral, a outra razão entre inteiros. Observe que cada inteiro da nova razão é um produto de outros dois:

$$\frac{n_1 d_2}{d_1 n_2}$$

— Munido desse tipo de notação — prosseguiu ela —, Balmer transformaria rapidamente o problema todo num conjunto de equações que poderiam ser resolvidas por métodos rotineiros. Por exemplo, lembre-se de que, quando ele extraiu a razão dos dois primeiros números do hidrogênio, H_α e H_β, obteve 27/20, certo? Depois, tudo o que precisava fazer era igualar essa razão com a forma geral que acabei de lhe mostrar. O resto se resolveria com a álgebra:

$$\frac{n_1 d_2}{d_1 n_2} = \frac{27}{20}$$

— Ele também usou outras duas equações — disse ainda Maria —, uma para cada uma das outras razões possíveis:

$$\frac{n_1 d_3}{d_1 n_3} = \frac{189}{125}$$

e

$$\frac{n_1 d_4}{d_1 n_4} = \frac{72}{45}$$

— No final — acrescentou —, essas três equações eram tudo de que Balmer dispunha para prosseguir. Mas constatou-se que eram tudo de que ele precisava. Já então não havia três equações, mas seis. É que, em cada uma das três equações, ele igualou os numeradores com os numeradores e os denominadores com os denominadores.

$n_1d_2 = 27$
$d_1n_2 = 20$
$n_2d_3 = 189$
$d_1n_3 = 125$
$n_1d_4 = 72$
$d_1n_4 = 45$

— Com isso — concluiu Maria —, Balmer tinha seis equações e oito incógnitas. Era um fato matemático, conhecido até mesmo pelas mocinhas a quem ele ensinava matemática, que um sistema com mais variáveis do que equações costuma ter mais de uma solução. Uma vez montadas as equações dessa maneira, ele não levaria mais de uma hora para resolvê-las. É realmente impressionante a rapidez com que as soluções aparecem. Veja só.

Ela apontou para a primeira equação, $n_1d_2 = 27$. Isso significava que, qualquer que fosse o valor dos inteiros n_1 e d_2, o produto desses valores tinha que ser 27. Essencialmente, havia duas possibilidades. Ou $n_1 = 9$ e $d_2 = 3$, ou, ao contrário, $n_1 = 3$ e $d_2 = 9$. Quando o primeiro conjunto de valores foi incluído nas equações, seu efeito se alastrou, levando a valores definidos de algumas das variáveis, enquanto outras permaneciam como incógnitas. Se você substituir n_1 por 3 e d_2 por 9 em todos os lugares em que essas variáveis aparecem no conjunto anterior de seis equações, chegará ao seguinte conjunto, que é um pouco mais simples:

$\underline{n_1 = 9, d_2 = 3}$
$d_1n_2 = 20$
$d_3 = 21$
$d_1n_3 = 125$
$d_4 = 8$

$d_1 n_4 = 45$

Todas as três equações inalteradas continham o fator d_1 e, em conjunto, implicavam que, fosse qual fosse esse número, ele teria que dividir exatamente os inteiros, 20, 125 e 45. O único número capaz de fazer isso é 5, de modo que as equações impuseram os seguintes valores, todos decorrentes da suposição inicial a respeito de n_1 e d_2:

$\underline{n_1 = 9}$, $\underline{d_2 = 3}$, $\underline{d_1 = 5}$
$n_2 = 4$
$d_3 = 21$
$n_3 = 25$
$d_4 = 8$
$n_4 = 9$

Canzoni continuou: — Agora que tinha valores para todos os inteiros que participavam das razões dos comprimentos de onda, Balmer podia voltar atrás e colocá-los no lugar da fórmula $b(n/d)$, que ele presumia aplicar-se aos números dos comprimentos de onda. Os resultados devem tê-lo deixado muito contente, pois sua primeira ideia, com certeza, foi extrair o número fundamental do hidrogênio. Considere o caso da primeira linha do hidrogênio, no comprimento de onda 6562,10. Balmer pôde então escrever a equação

$b(n/d) = 6562{,}10$,

substituindo-a pelos valores $n = 9$ e $d = 5$, o que deu

$b(9/5) = 6562{,}10$,

e depois encontrar b, o que também é uma simples questão de álgebra:

$b = 3645{,}6$

Depois de experimentar isso com as outras razões, como $n2/d2$, resolvendo-as de maneira a encontrar o número fundamental de cada caso,

ele obteve valores muito semelhantes. Aqui estão eles, todos juntos: 3645,6, 3645,5, 3645,7 e 3645,5.

— Era realmente notável — comentou Maria. — O fato de cada conjunto de valores *n* e *d* produzir essencialmente o mesmo valor do número fundamental do hidrogênio significava que Balmer podia usar esse valor nas fórmulas originais e reproduzir os comprimentos de onda:

$$3645{,}6(9/5) = 6562{,}08,$$

o que concordava com o comprimento de onda original, 6562,10, com um erro relativo de 1/100.000 (ou 10^{-5}). Ele havia descoberto seus inteiros!

Fiquei meio desconfiado, como se Canzoni estivesse jogando areia em meus olhos, ou, pior ainda, nos dela. Os resultados eram quase bons demais para ser verdadeiros. Lembrei-me imediatamente de que tinha havido duas soluções. Onde teriam levado Balmer os outros valores de n_1 e d_2, com o 9 e o 3 invertidos? Maria respondeu que tinham levado essencialmente à mesma solução.

— Parece irônico — disse eu. — Se alguém houvesse proposto esse probleminha a um matemático, sem dizer de onde vinham os dados, é provável que ele ou ela o achasse meio maçante.

— Com certeza — retrucou Maria. — Em si mesmo, não se trata de um problema particularmente interessante, e tenho certeza de que, se fosse apresentado a Balmer em algum outro contexto, ele não lhe teria dado maior atenção. Balmer certamente não descobriu uma matemática nova. Apenas aplicou a álgebra, e nada de muito sofisticado, aliás. Mas ali estava uma mensagem vinda do cosmo sob a forma de quatro numerinhos. Balmer havia decifrado a mensagem, pelo menos a ponto de descobrir quatro razões de inteiros ocultas em seu cerne. Mas essa foi a parte fácil. O que ele fez em seguida foi mais interessante, em termos matemáticos.

Maria esclareceu: — Ele examinou de perto a série de razões que havia obtido para os quatro comprimentos de onda do hidrogênio: 9/5, 4/3, 25/21 e 9/8. Reparou que todos os numeradores eram quadrados perfeitos, enquanto os denominadores eram menores em 1 ou 4 do que os numeradores. As razões, em suma, formavam uma série de aparência interessante. Para os matemáticos, esse tipo de estrutura sugestiva é como agitar um pano vermelho diante de um touro. Ele parte em disparada! O matemático busca uma fórmula que gere essas razões, *ad infinitum*, se

necessário. Nessas fórmulas, tem-se uma variável inteira, digamos, *m*, que funciona como um mostrador. A variável *m* assume os valores 1, 2, 3… etc., enquanto a fórmula vai produzindo as razões de Balmer, como 9/5, 4/3 e assim por diante.

— Ele foi brincando — disse Maria — com fórmulas como

$$\frac{m^2}{m^2-1} \quad \text{e} \quad \frac{m^2}{m^2-4}$$

e, quando substituiu *m* por 2, 3, 4 etc., tornou a obter todas as razões que havia achado antes, e mais ainda, como mostrarei dentro em pouco. Mas sua verdadeira genialidade, como tal, proveio de um salto de fé, que poderíamos chamar de fé pitagórica, e que propôs a seguinte fórmula geral, que continha as duas anteriores:

$$\frac{m^2}{m^2-n^2}$$

— Cada valor de *n* levava a uma série diferente — acrescentou Maria. — Quando $n = 1$, a fórmula se reduzia à primeira fórmula que escrevi. Produzia os números 4/3, 9/8, 16/15, 25/24 e assim por diante, substituindo-se *m* por 2, 3, 4, 5 etc. Quando $n = 2$, a fórmula geral tornava-se idêntica à segunda fórmula que escrevi. Nesse caso, com $m = 3, 4, 5, 6$ etc., a fórmula produzia 9/5, 16/12, 25/12 e assim por diante. Nessas duas séries você encontrará cada uma das quatro razões que Balmer descobriu nos dados cósmicos de Ångström. E então veio o dado decisivo. Não apenas todas as novas medidas que Ångström enviou a Balmer encaixaram-se em suas fórmulas, como Balmer também previu novas linhas de hidrogênio, como, por exemplo, nessa citação extraída de um artigo publicado em 1885:

> A partir da fórmula, obtivemos, para uma quinta linha de hidrogênio, $49/45.3645.6 = 3969.65.10^{-7}$. Eu não sabia coisa alguma sobre essa quinta linha, que devia estar na parte visível do espectro, logo antes de H1 (que, de acordo com Ångström, tem um comprimento de onda de 3968,1), e tive de presumir que ou as relações de temperatura não eram favoráveis à emissão dessa linha, ou a fórmula não tinha aplicação geral.

— Entretanto — prosseguiu Canzoni —, a linha foi encontrada, além de muitas outras. Hoje em dia, todas as séries previstas pela fórmula de Balmer se materializaram. Ou seja, as técnicas espectrográficas mais apuradas revelaram inúmeras linhas novas do espectro do hidrogênio. Elas são

conhecidas como a série de Lyman (n = 1), a série de Paschen (n = 2), a série de Brackett (n = 3) e a série de Pfund (n = 4). Em suma, todas as linhas fisicamente possíveis, previstas pela fórmula de Balmer, mostraram ocorrer no hidrogênio natural, elas e nenhuma outra.

Nesse momento, um sino no interior de San Marco fez os amantes da música voltarem em bando para dentro da igreja, passando pela porta e por nós. Alguns olharam com ar intrigado para aquelas duas pessoas que conversavam animadamente no banco — dois críticos musicais, sem dúvida, profundamente imersos numa discussão sobre o desenvolvimento da polifonia. A pausa me deu tempo para refletir. Eu não queria deixar escapar nada.

— Na sua opinião — perguntei —, havia alguma outra solução ou alguma outra fórmula que pudesse ter surgido daqueles quatro números, para não mencionar os que vieram depois?

— Não consigo nem imaginar essa possibilidade — sussurrou Canzoni, olhando para uma gôndola solitária que se dirigia para a ponta do cais. — Seria mais fácil aquele barco criar asas e voar para a Lua. Você poderia trabalhar a vida inteira sem descobrir nenhuma outra fórmula. Sabe, só existe uma, e Balmer a descobriu.

— Ora — continuou ela —, a importância dessa fórmula levou muitos anos para ser realmente entendida. No mesmo ano em que o artigo de Balmer foi publicado, nasceu um menino numa família de sobrenome Bohr, na Dinamarca. E foi Niels Bohr quem finalmente explicou a fórmula de Balmer, ao investigar o novo modelo quântico do átomo de hidrogênio. As linhas correspondiam aos níveis de energia que esse átomo podia ter. E cada nível produzia uma radiação característica, com um comprimento de onda específico, que eram os números medidos por Ångström.

— A nova teoria quântica — disse Maria —, tal como desenvolvida por Bohr e outros, tinha em sua própria base a ideia de que a energia, em última instância, nada tinha de contínua, mas era descontínua. Todos os números quânticos que indicavam esses estados eram inteiros ou metades de inteiros. Infelizmente, Balmer não viveu para conhecer a nova teoria, para ver o cosmo pitagórico de inteiros renascer dessa maneira.

Canzoni voltou-se para mim.

— Lamento que nos tenhamos atrasado para o espetáculo. Foi minha culpa. Não prestei atenção ao tempo. Vou levá-lo a seu hotel, do outro lado

do Grande Canal.

Caminhamos lentamente pelas pedras maciças do calçamento. Já era tarde e o cheiro da cidade parecia haver-se modificado: agora era mais complexo, uma miscelânea feita de pedras antigas, comida, óleo lubrificante, madeira apodrecida, poluição e sabe Deus o que mais. Respirei fundo, inalando Veneza como um tônico, e perguntei a Canzoni o que ela havia achado de minhas três perguntas. Que ilustrava a história de Balmer, em particular?

— Antes de eu responder — disse ela —, devo dizer que suas perguntas são muito fracas. É como a parábola dos cegos e do elefante. Um dos cegos pergunta: “Por que esse animal tem dentes de um metro de comprimento?” Outro pergunta: “Por que esse animal tem a pele como um cobertor amarrotado?” Mas alguém deveria perguntar: “O que esse elefante está fazendo aqui?”

— Do mesmo modo — continuou —, se você pergunta “Por que a matemática parece ser descoberta?”, ou “Por que a matemática fica aparecendo no mundo físico?”, você perde de vista o principal. O elefante está ali o tempo todo, mas nós estamos cegos.

— Que elefante? — indaguei. Eu não estava acompanhando o raciocínio dela.

De repente, Canzoni deu uma risada. — Só posso lhe dizer que é um elefante invisível… quer dizer, invisível para os nossos sentidos comuns. Para os que pensam no cosmo e em sua ligação com a matemática, é possível sentir o elefante.

— A descoberta de Balmer — prosseguiu — não foi uma descoberta matemática, como já assinalei. Portanto, seus resultados não abordam a existência independente da matemática, pelo menos não de maneira direta. Mas abordam claramente a presença da matemática no cosmo.

— A fórmula de Balmer — disse ela ainda — foi descoberta no meio de quatro números que nos vieram das estrelas distantes. Esses números, ondulando pelo espaço sob a forma de quatro comprimentos de onda precisos, continham uma espécie de mensagem, uma mensagem que só era decifrável no contexto da matemática. Na verdade, podemos até provar, pelo método da teoria da informação, que naqueles cerca de 20 algarismos só havia espaço para uma mensagem, do tamanho da que Balmer descobriu.

A mensagem era uma fórmula dos níveis de energia do átomo de hidrogênio.

— Os seres alienígenas — continuou — encontrariam exatamente a mesma mensagem nesses números, embora talvez expressassem a fórmula de maneira muito diferente. A descoberta de Balmer é um exemplo impressionante dos padrões matemáticos que residem em quase todos os aspectos da realidade física, quando ela é examinada com atenção suficiente. Eu tenho uma tese que pretendo explorar com você amanhã. Ela diz que esses padrões existem porque alguma coisa no cosmo satisfaz axiomas que estão no holos. O que explica o elefante invisível.

— Enquanto isso, eu mesma tenho uma pergunta — declarou. — Por que algumas pessoas resistem tão obstinadamente à ideia da existência independente da matemática? Antes que se consiga proferir mais de uma frase, elas começam a se remexer e a se contorcer, olhando para o teto. Alguma coisa as incomoda, acho, como se eu estivesse violando sua liberdade. Outras pessoas acham perfeitamente aceitável a ideia de uma estrutura subjacente. “Por que não?”, dizem elas.

— Sejamos francos — propôs Maria. — Até os filósofos que buscam uma razão para duvidar da existência da realidade objetiva ficam muito contentes em agir como se ela existisse. Como poderiam agir de outro modo e continuar a viver? Sem chamá-los de hipócritas, observo que eles se portam como se acreditassem numa realidade objetiva. A realidade física tem estabilidade suficiente para que eles planejem, imaginem e recordem, sem cometer grandes erros na maior parte do tempo.

— E — concluiu —, se aceitarmos a existência de uma realidade objetiva, e concordarmos em que ela contém regularidades regidas por leis, como foi descoberto pela física e por outras ciências, e se também admitirmos que a matemática tem uma existência independente, de um tipo muito peculiar, qual será, pergunto eu, a explicação mais simples possível para esse estado de coisas? O holos controla o cosmo porque o cosmo não tem outra alternativa. Se, de fato, um determinado sistema físico dentro do cosmo obedece a certos axiomas, como pode ele deixar de obedecer também a cada um dos teoremas que são válidos em relação a esses axiomas?

Havíamos chegado ao centro de uma ponte no Grande Canal. Canzoni parou para olhar a correnteza lenta e escura.

— Às vezes, sabe, eu também me rebelo contra essa situação. Às vezes, quando contemplo juntos o holos e o cosmo, considero que essa é a ideia mais assustadora do mundo!

Fiquei surpreso. – Por quê? – perguntei.

— É difícil pôr isso em palavras. Sabe, a existência independente do holos pode explicar o cosmo, num certo sentido, mas ainda resta explicar a existência do holos, e isso ultrapassa completamente a minha capacidade. É racional e absurdo. Só posso lhe dizer que nós, os seres humanos, só conseguimos apreender o holos através da mente. E se a existência dele também for, em última instância, algum tipo de fenômeno mental? Não da nossa mente, mas de uma outra.

Ela não disse mais nada. Andamos em silêncio até meu hotel. Na porta, perguntei-lhe como iria para casa. Maria respondeu que não morava longe dali.

— Amanhã, como eu já disse, vou mostrar-lhe uma coisa interessante.

Com isso, deu meia-volta e se foi, abruptamente.

Meu quarto era luxuoso, com um banheiro de mármore com telefone e uma cesta de frutas sobre a mesa. O preço, segundo o recepcionista da noite, era de 30.550 liras, o que eu esperava que não me levasse à falência.

Fiquei na varanda do quarto, olhando para o Grande Canal. Se Canzoni tinha razão quanto à mensagem nas linhas do hidrogênio, quanto a ela ser decifrável de uma única maneira, aquilo era uma prova convincente da ligação íntima entre os padrões matemáticos e a realidade física. De algum modo, o holos e o cosmo estavam ligados. Seria tão simples quanto ela havia afirmado? Os sistemas físicos realmente obedecem a axiomas? Nesse caso, seria como Canzoni tinha dito. Como poderiam esses sistemas deixar de obedecer a todos os teoremas decorrentes desses axiomas? Que me diria Canzoni no dia seguinte?

Deitei-me na cama, com a intenção de descansar um pouquinho, mas caí quase instantaneamente num sono profundo. Acordei com o som de trovoadas ribombando a meu redor e com a lembrança de um sonho perturbador. Eram duas horas da manhã. Em meio aos lampejos dos relâmpagos, alguns detalhes me voltaram à lembrança. Eu me havia afogado num dos canais, afundando numa escuridão gelada que pesava sobre mim. Não me lembrava de ter morrido, mas alguma coisa no sonho

me dizia que sim. O universo havia nascido num pensamento que não tinha pensador. Pelo menos, não era eu.

---

a E, na língua portuguesa, também a palavra *algarismo*. (N.T.)

CAPÍTULO 6

A REALIDADE ÚLTIMA

No prédio da Historia della Scienza, perto do Grande Canal, uma série de sacadas graciosas servia de nichos generosos ao longo de todo o terceiro andar. Foi num deles (equipado com seu próprio quadro-negro!) que Maria Canzoni e eu nos sentamos na manhã seguinte.

À parte o sonho inquietante, eu parecia ter dormido muito bem. Fazia muito que o temporal havia passado. Um sol luminoso brilhava por toda parte e brisas leves agitavam os aromas de Veneza, trazendo-os das calçadas, dos canais e dos próprios prédios. Eu me sentia alerta, na expectativa da surpresa que Canzoni dizia ter reservado para mim. Iria ver o elefante desaparecer?

Canzoni parecia tão renovada quanto a manhã, como se sua ligação com Veneza fosse diretamente física. — Para ser franca, tenho que lhe expressar minha gratidão. Sua visita me deu energia e aquela palavra simples de Pygonopolis alargou por si só os meus horizontes. Às vezes, dar nome a uma coisa produz os resultados mais extraordinários. No meu caso, deu-me coragem para sacudir a poeira de uma teoria que venho guardando em meu… minha *cabinetta*, por assim dizer, há muitos anos. Falarei mais dela depois. Enquanto isso, a palavra *holos* passou a fazer parte do meu vocabulário de trabalho.

Em seguida, Canzoni indagou sobre minhas ideias a respeito do holos e das características que ele poderia ter, para me convencer de que tinha existência independente.

— Parece-me — disse eu — que a questão da existência independente poderia ser formulada em termos geográficos. O holos, como quer que o concebamos, tem uma espécie de estrutura. O que eu quero dizer é que, se dois matemáticos partirem dos mesmos axiomas, muito frequentemente

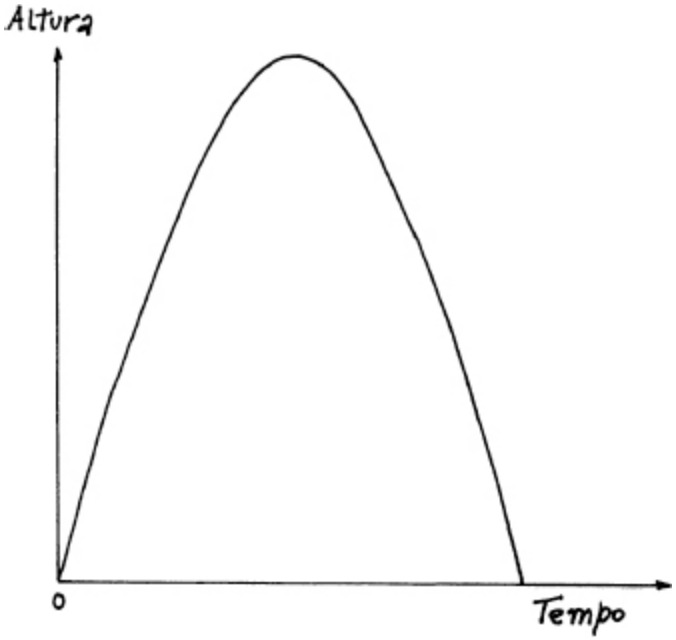
acabarão descobrindo as mesmas coisas, como dois exploradores que perambulassem pela mesma ilha. Os dois poderiam fazer anotações em seus diários de bordo. O explorador A escreveria: “Ao sul da montanha costeira, de formato parecido com uma broa, encontrei uma enseada profunda com uma bela praia que cobre toda a sua extensão.” Enquanto isso, o explorador B escreveria: “Andei por selvas densas a leste até chegar a uma vasta praia que se estendia por quase dois quilômetros. Ela margeia uma baía que é guardada, na extremidade norte, por uma sentinela de pedra, uma enorme montanha em formato de cupinzeiro.” Se esses dois exploradores desenhassem mapas, por mais toscos que fossem, ficaria claro que, entre outros aspectos, haviam descoberto a mesma praia. E ninguém veria nada de notável nisso.

— Bravo! Você expressou bem a ideia — disse Canzoni, rindo. — É extremamente romântica. Apesar disso, convém dizer que ainda nos resta conduzir um experimento controlado em que dois matemáticos façam exatamente isso. Temos que extrair nossos dados de eventos históricos reais. Você com certeza sabe da frequência com que matemáticos diferentes tropeçaram precisamente num mesmo teorema. Eles nem sequer têm que viver na mesma época ou pertencer à mesma cultura.

—Talvez você conheça o exemplo clássico da descoberta independente — continuou Maria. — No que depois viria a ser considerado um avanço culminante da matemática europeia primitiva, Newton e Leibniz descobriram o cálculo diferencial. Quanto mais se esmiúça o trabalho deles, menos se fica surpreso com esse fenômeno. No início do século XVIII, os cientistas naturais estavam consolidando as leis do movimento, tal como descritas por Galileu e outros. Estavam à procura de uma técnica para analisar o movimento, mas foram impedidos pelo fato de que o novo sistema copernicano, em sua formulação kepleriana, exigia que eles lidassem com quantidades que variavam continuamente. Um corpo atirado para cima não se movia uniformemente, por exemplo, mas ficava mais lento sob a influência da gravidade, e acabava parando e caindo na Terra com uma velocidade crescente.

— Esses dois homens — acrescentou Canzoni — tiveram acesso à geometria analítica recém-descoberta por René Descartes. Podia-se ver num relance o que fazia um sistema físico. Aqui está, por exemplo, a curva descrita por um projétil num campo gravitacional. Vamos dizer que seja uma pedra jogada para cima a 20 metros por segundo.

Canzoni foi até o quadro e desenhou uma figura assim:

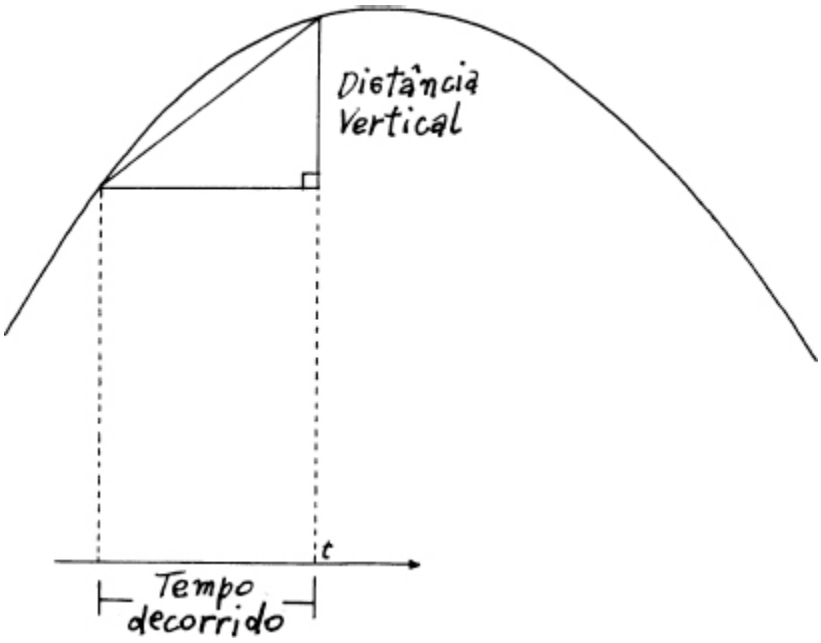


Altura da pedra versus o tempo

Ela prosseguiu: — Essa curva retrata a ascensão e a queda da pedra. O eixo horizontal representa o tempo, e o vertical, a altura da pedra acima do chão. A cada momento, desde o instante em que o objeto é atirado para cima, até o momento em que torna a pousar no chão, a pedra tem uma certa distância definida acima do solo e uma certa velocidade definida em relação a ele.

— Eu poderia parafrasear a experiência que Newton e Leibniz tiveram com essa curva — continuou —, dizendo que os dois reconheceram que a velocidade vertical da pedra, num momento qualquer, tinha uma estreita ligação com a inclinação da curva nesse momento.

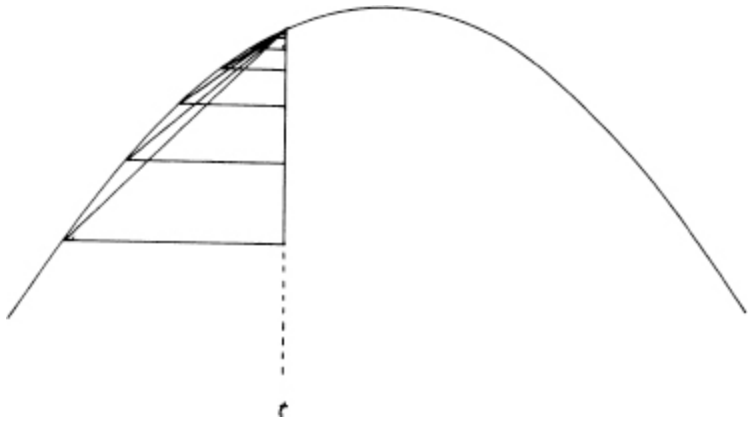
Canzoni desenhou um triângulo retângulo em cima da figura. A base do triângulo representava um certo tempo decorrido, e seu lado vertical representava a distância para cima percorrida pela pedra nesse intervalo. A inclinação da hipotenusa do triângulo representava a velocidade da pedra nesse intervalo de tempo. A inclinação era simplesmente a razão entre o lado vertical e o lado horizontal, ou a tangente do ângulo na base, como poderia dizer al-Flayli.



Triângulo da velocidade da pedra

Canzoni prosseguiu: — Os dois cientistas, trabalhando nesse momento em sua condição de matemáticos, perceberam que a hipotenusa desse triângulo era apenas uma aproximação, uma espécie de velocidade média da pedra no intervalo de tempo representado pela base do triângulo. Mas os dois também perceberam que, à medida que desenhavam triângulos cada vez menores, encolhendo sistematicamente a base temporal, a inclinação convergia (ou parecia convergir) para um valor específico, que só poderia ser a *velocidade instantânea*, ou seja, a velocidade no momento em questão. Olhe só, estou encolhendo o triângulo aqui, e aqui estou vendo a hipotenusa aproximar-se cada vez mais… de quê?

Maria Canzoni havia passado por uma transformação notável enquanto explicava o diagrama. Seus movimentos tornaram-se vigorosos e agressivos. Primeiro, ela encolheu o triângulo por mímica, como se fosse uma operação física. Em seguida, desenhou uma sucessão de triângulos retângulos cada vez menores. E a cada triângulo sucessivo, ela balançava o corpo, apoiando-se ora numa perna, ora na outra, como se estivesse dançando.

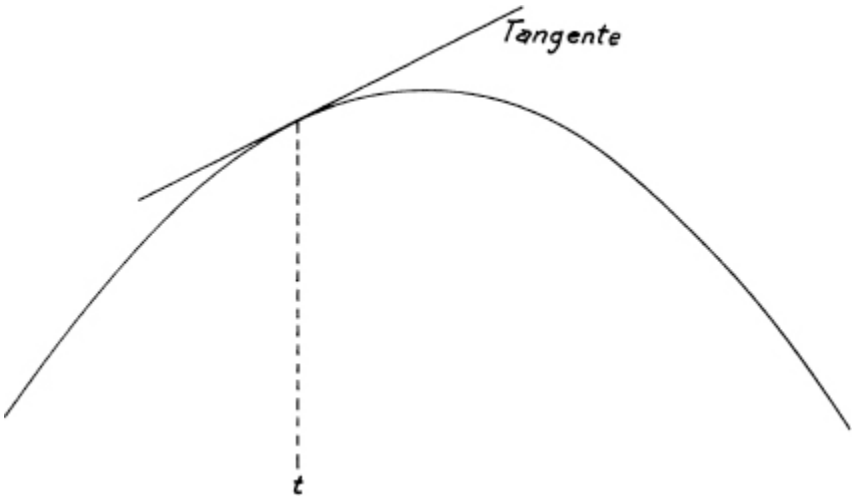


Uma sucessão dos triângulos

No exato momento em que Maria se voltou para observar minha reação, ocorreu-me que às vezes ela devia lecionar exatamente assim, e que tinha uma alma de atriz, hábil em comunicar ideias abstratas através de movimentos corporais. Alguns filósofos afirmaram que a matemática é uma ciência visceral, quase tátil. Os matemáticos lutam com problemas, como todo o mundo, mas que grandes lutas! Canzoni arrancou aquela clareza de percepção de lugar nenhum, voltou-se para mim e sorriu.

Foi minha vez de dizer: — Bravo!

— Os dois puderam perceber — prosseguiu ela —, em cada curva que concebiam, que o triângulo minguante acabaria desaparecendo e se transformando em nada, mas perceberam que, de algum modo, a inclinação de sua hipotenusa ainda continuaria presente no ponto de fuga derradeiro, como uma linha muito especial, que era conhecida até mesmo na Antiguidade. Hoje em dia, nós a chamamos de tangente. Ela apenas toca a curva no ponto tangencial em que a velocidade é investigada.



Velocidade = inclinação da tangente

— No que diz respeito a instrumentos reais com que analisar essa situação peculiar — acrescentou Canzoni —, Newton e Leibniz ficaram igualmente perdidos. Refiro-me a instrumentos para comprovar coisas, a instrumentos para produzir uma situação de certeza. Uma coisa era perceber que a inclinação da derradeira hipotenusa, aquela que desaparece, era idêntica à inclinação da tangente da curva, mas outra muito diferente era provar isso. Como poderiam eles falar sensatamente da inclinação de uma linha que havia desaparecido, a ponto de se transformar em nada? Cada qual à sua maneira, Newton e Leibniz simplesmente presumiram o que era óbvio em termos visuais. A inclinação da tangente da reta curva no ponto em questão era, na verdade, a velocidade instantânea nesse ponto.

— Devo acrescentar — prosseguiu Canzoni — que, no início do século XVIII, as curvas do tipo da que acabei de desenhar tinham fórmulas algébricas, graças a René Descartes, entre outros. Por exemplo, a equação da posição vertical da pedra seria escrita de maneira bastante semelhante a nossa notação de hoje.

Ela escreveu no quadro a seguinte equação, explicando que *y* era a posição vertical da pedra, medida a partir do chão, e que 20 era a velocidade ascendente inicial com que a pedra era atirada. O tempo *t* começava em 0, no instante exato em que a pedra era lançada. Em cada valor de *t*, o valor correspondente de *y* indicaria a altura vertical da pedra.

$$y = 20t - 4{,}9t^2$$

— O que é o termo negativo? — perguntei.

— É o efeito da gravidade, que sempre reduz a velocidade vertical da pedra, acabando por reduzi-la a zero, quando a pedra recomeça a cair, com uma aceleração de 9,8 metros por segundo, em todos os segundos. O termo geral é $1/2\ gt^2$, onde g é a aceleração decorrente da gravidade.

— Como eu ia dizendo — continuou Canzoni —, Leibniz e Newton descobriram que uma equação de posição, como a que temos diante de nós, poderia ser reduzida a uma equação de movimento, multiplicando-se cada coeficiente por sua potência de t e, em seguida, reduzindo essa potência em 1. Foi assim que

$$20t^1 - 4{,}9t^2$$

transformou-se em

$$1 \times 20t^0 - 2 \times 4{,}9t^1,$$

ou, simplesmente, em

$$20 - 9{,}8t.$$

A equação de movimento na qual y, a posição vertical, é substituída pela velocidade vertical fornece, então, a velocidade ascendente da pedra em cada instante possível. Esse processo de passar de uma fórmula da posição da pedra para uma fórmula de sua velocidade foi o componente principal do que hoje conhecemos como cálculo diferencial.

— Newton — disse ainda Canzoni —, que fez sua descoberta umas duas décadas antes de Leibniz, manteve seu método em sigilo. Chamou essa nova matemática de *fluxões* e escreveu a operação que acabamos de descrever como y, onde

$$\dot{y} = 20 - 9{,}8t$$

Leibniz, por outro lado, chamou-o de cálculo diferencial e escreveu a velocidade em sua notação “diferencial” como

$$dy/dt = 20 - 9{,}8t.$$

— Como você sabe — comentou Canzoni —, a notação e a terminologia de Leibniz foram as que sobreviveram, e não as de Newton. É claro que os dois descobriram exatamente o mesmo método para lidar com o movimento. Ambos perceberam que a nova matemática implicava calcular não apenas diferenciais, mas também integrais. Esta última operação era, essencialmente, apenas o inverso da diferencial. Por exemplo, no contexto desse exemplo, a integral de

$$20 - 9{,}8t$$

era, simplesmente,

$$20t - 4{,}9t^2.$$

Se a diferencial equivalia a determinar a inclinação da reta tangente de uma curva, a integral implicava a determinação da área abaixo da curva.

— O novo cálculo — lembrou Canzoni — passou a ser aplicado a praticamente todos os tipos concebíveis de movimento ou mudança no mundo físico. Muitas vezes, os matemáticos ou os físicos partiam de uma equação que envolvia diferenciais e passavam, por integração, para uma fórmula real de posição, como essa de que partimos aqui. Essas equações, chamadas *equações diferenciais*, têm dominado a física desde então. Elas aparecem na equação de Schrödinger sobre o átomo de hidrogênio e na teoria da relatividade geral de Einstein.

— Só quase no final do século XVIII — continuou Canzoni — foi que os matemáticos, empenhados numa grande faxina, tentaram dar uma base mais rigorosa ao novo cálculo. O matemático francês Augustin Cauchy fez boa parte desse trabalho, deixando claro que, quando se encolhia o triângulo retângulo, como eu lhe mostrei antes, a inclinação da hipotenusa máxima, aquela que desaparece, era igual, num sentido perfeitamente rigoroso, à inclinação da tangente nesse ponto. Nesse momento, o cálculo ficou garantido.

— Antes disso — acrescentou Canzoni —, os seguidores de Newton ou Leibniz usavam a nova técnica com uma espécie de abandono despreocupado. Havia discussões acaloradas sobre qual dos mestres, digamos assim, tivera prioridade na grande descoberta. Mas houve poucas discussões sobre os fundamentos lógicos do cálculo diferencial.

— E foi assim — concluiu ela — que duas grandes mentes penetraram no holos como exploradores. Eles vieram de direções diferentes, navegaram em navios diferentes e em momentos diferentes, mas chegaram a um mesmo continente novo, nele descobrindo os mesmos acidentes geográficos. Seus diários de bordo contêm anotações diferentes e expressaram sua descoberta em linguagens diferentes, mas qualquer um podia ver que eles estavam descrevendo a mesma coisa. De que outro modo poderia ter havido essa disputa sobre a prioridade?

Achei que já era hora de voltarmos ao holos, do qual Canzoni tinha ficado tão enamorada. Com isso em mente, perguntei: — Quer dizer que isso ilustra a existência real do holos?

— Se você está falando em *real* no sentido muito especial que discutimos, sim. Porventura esse exemplo de descoberta independente não ilustra a existência independente do holos? E não há, literalmente, centenas de casos de descobertas independentes que também o ilustram? Tem havido um número muito maior desses casos do que se poderia explicar por algum tipo de acaso, ou mesmo pela influência cultural. Posso lembrar-lhe que o número de fórmulas ou expressões possíveis, contando apenas as que são completamente desiguais, ainda é infinito. Se você considerar que o holos não tem existência independente, até um único caso seria um milagre.

— E a conexão cósmica? — perguntei. Talvez eu estivesse sendo meio tolo, mas ela sabia o que eu queria dizer.

— A equação da posição da pedra equivale a uma descrição precisa de seu comportamento em todos os pontos da sua trajetória. Algumas pessoas alegam que a pedra deparará com a resistência do ar e que, portanto, a trajetória exibida não será a verdadeira. Mas isso é um subterfúgio, na medida em que também temos uma teoria completa da resistência do ar, e um único termo basta para tornar a equação ainda mais exata. E não é por acaso que ela é tão exata. Ela incorpora duas das leis de Newton. Primeiro, existe o momento ascendente da pedra, que, como um corpo em movimento, tende a permanecer nesse estado de movimento, a menos que seja impelido por alguma força externa: nesse caso, a gravidade. Quanto à gravidade, esta talvez tenha sido a maior realização de Newton. O efeito da gravidade sobre qualquer corpo que esteja livre para se mover é acelerá-lo. O momento e a gravidade são simplesmente fatos. Ambos podem ser medidos no laboratório, a qualquer momento e em qualquer lugar, e o resultado será sempre o mesmo. Eles fazem parte da estrutura subjacente do

cosmo, se você quiser. *Por que* fazem parte dela, isso já é uma pergunta completamente diferente.

Canzoni respirou fundo. — Há um outro exemplo de descoberta simultânea, dessa vez não na matemática, mas na astronomia. Mas, na verdade, trata-se de um exemplo sobre a estreita relação entre o cosmo e o holos. Ele concerne à exatidão da nova lei da gravitação universal descoberta por Newton. Implica dois matemáticos, ambos jovens e ambos utilizando a mecânica celeste newtoniana.

— Você disse que não é um exemplo de descoberta matemática simultânea, mas que havia dois matemáticos envolvidos?

— Eles aplicaram a matemática a um fenômeno celeste, descobriram exatamente a mesma possibilidade, e fizeram exatamente a mesma previsão. A história é a seguinte.

Ela voltou a sua cadeira e tomou um gole de café.

— Em 1781, o astrônomo William Herschel havia descoberto um novo planeta, ao qual deu o nome de Urano. Outros astrônomos apontaram seus telescópios para o novo corpo celeste e traçaram sua órbita de acordo com a nova mecânica celeste. A princípio, Urano seguiu obedientemente a órbita traçada, mas, depois de muitos anos, começaram a surgir algumas discrepâncias. O planeta estava se movendo mais devagar do que deveria em sua órbita, de acordo com a teoria de Newton. Qual era o problema? Será que a teoria de Newton, tão lindamente elaborada, teria que ser descartada, junto com os epiciclos de outrora? George Airy, o Astrônomo Real Britânico, preocupou-se com a ideia de que talvez, afinal, a lei newtoniana não fosse universal, mas se enfraquecesse mais depressa do que se supunha com a distância, talvez desaparecendo por completo a distâncias suficientemente grandes. Só que ele não conseguiu conceber como isso seria possível.

— Em 1843 — prosseguiu ela —, John Couch Adams, recém-formado pela Universidade de Cambridge, pôs-se a trabalhar com afinco num problema extremamente trabalhoso. Se a irregularidade do movimento de Urano se devesse a mais um planeta desconhecido, cuja órbita ficasse mais distante do Sol, seria teoricamente possível descobrir a órbita e a posição desse planeta, usando as mesmas leis da gravitação universal que haviam permitido prever o movimento de Urano e dos demais planetas. Em 1845, Adams conseguiu fazer uma previsão sobre a existência de um novo planeta. Mandou uma carta a Airy, dizendo-lhe onde procurá-lo no céu, mas

Airy estava fora da cidade, em viagem à França. Quando voltou, sentiu uma curiosidade imediata sobre os resultados de Adams e escreveu-lhe uma carta, fazendo outras perguntas sobre sua descoberta. Adams foi procurá-lo, mas tornou a se desencontrar dele e, a partir daí, talvez por se sentir rejeitado, não se empenhou em retomar a correspondência.

— Enquanto isso, na França — acrescentou Canzoni —, Urban Jean Leverrier, que era ligeiramente mais velho do que ele, estava dedicado ao mesmo problema já solucionado por Adams. Sem saber das afirmações de Adams sobre a existência de um novo planeta, Leverrier tratou de calcular, com o mesmo trabalho, a órbita e a massa do novo planeta, e acabou chegando a uma posição na qual os astrônomos poderiam procurar esse novo corpo celeste. Essa posição diferia em menos de um grau da que tinha sido indicada por Adams. Leverrier transmitiu sua posição não apenas a Airy, mas também a astrônomos de Berlim. Os ingleses, sendo meio lentos, foram derrotados pelos alemães, que confirmaram a existência de um novo planeta, exatamente onde Leverrier tinha dito que ele se situaria.

— Alguns anos depois — disse ainda Canzoni —, Leverrier e Adams foram agraciados com medalhas de ouro pela descoberta de Netuno, ambas entregues por Sir William Herschel, que, na ocasião, disse …

Ela interrompeu a frase no meio, levantou-se e saiu da sacada, voltando um minuto depois. — Aqui está uma cópia para você ver. É uma parte do discurso de Herschel por ocasião da premiação.

Li uma fotocópia da página de um livro sobre a história da ciência:

> A história dessa grande descoberta é a história do pensamento numa de suas mais altas manifestações, a história da ciência numa de suas aplicações mais refinadas. Vista dessa maneira, ela tem um interesse mais profundo do que qualquer questão pessoal. Proporcionalmente à importância desse passo, sem dúvida é interessante saber que mais de um matemático descobriu-se capaz de dá-lo. Assim enunciado, esse fato se torna, por assim dizer, uma medida da maturidade de nossa ciência; e não posso conceber nada mais adequado do que essa circunstância para inculcar na mente de todos o respeito pela massa de dados, leis e métodos acumulados, tal como existem no presente, e pela realidade e eficiência das formas em que eles foram moldados. Precisamos desse tipo de lembrete na Inglaterra, onde a falta de confiança nas teorias superiores ainda é, até certo ponto, nossa maior fraqueza.

— Foi um evento culminante — interrompeu Canzoni.

— Que tipo de evento culminante? — indaguei.

— Como disse Herschel, ele marcou a maturidade da teoria newtoniana da gravitação. Adams e Leverrier, trabalhando de maneira completamente independente, usaram a teoria newtoniana para descobrir um novo planeta.

Não apenas essa independência deixou claro que os cálculos estavam certos, como também a exatidão das previsões confirmou, de fato, a teoria de Newton e aplacou os temores de Airy de que a gravitação não funcionasse a distâncias muito vastas. Seja como for, o holos não apenas lhes disse que havia um planeta que eles não conheciam, como também lhes disse onde ele seria encontrado.

— Que pena! — suspirei. — Agora que o universo newtoniano foi suplantado pelo universo einsteiniano…

— Nada disso — interrompeu ela, com certa malícia. — Você se lembra do elefante invisível de ontem?

Assenti com a cabeça e procurei manter no rosto uma expressão séria.

— Se o universo einsteiniano, aquele que é regido pela relatividade, é a perna do elefante, o universo newtoniano é a pata, num certo sentido. A relatividade geral, como o nome implica, é geral. Descreve a dinâmica dos objetos que perfazem suas trajetórias em velocidades relativamente lentas, lá embaixo, na pata, e objetos que transitam a velocidades muito mais altas, que são o restante da perna, até a própria velocidade da luz, que é o limite absoluto de todas as velocidades do cosmo, com cerca de 300 milhões de metros por segundo.

— Todas as velocidades com que lidamos na vida cotidiana — prosseguiu Canzoni —, inclusive as velocidades das céleres aeronaves, podem ser encontradas na pata do elefante, por assim dizer. Nessas velocidades, Newton e Einstein estão de acordo. Deixe-me dar-lhe um exemplo. De acordo com a teoria da relatividade, os relógios de uma nave espacial veloz parecem atrasados ao serem comparados com os relógios que se encontram na Terra. Quão atrasados? Depende da velocidade. Quanto mais rápida é a nave, mais lento parece ser o movimento de seu relógio. O fator real de correção é muito fácil de calcular:

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Para os observadores situados na Terra, o relógio a bordo de uma nave espacial que trafegue à velocidade *v* parecerá ter um atraso equivalente a esse fator. Suponhamos que a nave trafegue, digamos, a 3 milhões de metros por segundo. Isso é infinitamente mais rápido do que qualquer nave

espacial que tenhamos construído até hoje. Qual é a correção einsteiniana, nesse caso?

Ela escreveu os seguintes cálculos no quadro:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(3/300)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(0.01)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-0.0001}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0.9999}}$$

$$=1.00005$$

— Como você pode ver — indicou ela —, o fator de correção é tão próximo de 1 que quase não chega a fazer nenhuma diferença notável. O relógio a bordo da nave estará cerca de 30 segundos atrasado depois de uma semana trafegando a essa velocidade.

— Ah, sim. Eu quase ia-me esquecendo — acrescentou Canzoni. — O teorema de Pitágoras está presente nas fórmulas que usamos na relatividade especial. Ele é o fator da raiz quadrada na parte inferior da fração. Não vou entrar nesse assunto, mas esse fator vem de Pitágoras!

Canzoni pegou seu café, que tinha deixado junto à cadeira, e bebeu um gole, dando uma olhada rápida para um pombo que pousara na grade de nossa sacada, como que num sinal.

— Acho que já é hora de o elefante desaparecer — disse-me, como se fosse um mágico prestes a subir ao palco. Levantou-se abruptamente e apagou do quadro o diagrama da pedra cadente e suas fórmulas. Em seguida, escreveu uma espécie de título:

MATÉRIA → ENERGIA → INFORMAÇÃO

— Você poderia resumir assim as minhas ideias sobre o holos — disse. Ficou um minuto inteiro olhando para o que tinha acabado de escrever. — Em 1805, John Dalton publicou seu primeiro artigo sobre a teoria atômica. Certamente não foi a primeira dessas publicações. Os gregos já haviam brincado com a ideia dos átomos, assim como os romanos. Leia Lucrécio e você descobrirá uma exposição surpreendentemente moderna dessa ideia. Mas foi com Dalton que ouvimos falar dos átomos pela primeira vez. Eles

eram pequenas partículas duras que compunham toda a matéria. Dalton imaginou que, se fosse possível ampliar essas partículas, seus átomos se assemelhariam a grãos ou pelotas de chumbo esféricos. Os átomos de Dalton combinavam-se de determinadas maneiras específicas na produção de vários compostos que constituíram os primórdios da química, mas não quero entrar nessa digressão. O importante é pensar nos átomos como pequenos pedaços de chumbo.

O átomo daltoniano

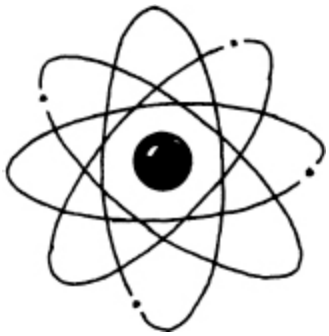
— Pois bem — prosseguiu ela —, o átomo daltoniano, apesar de ter levado algumas décadas para ser amplamente aceito, representou uma revolução não menos importante no pensamento do que a revolução copernicana. No entanto, ninguém fala em mudança paradigmática em relação a ele. Na verdade, esse átomo foi mais importante por dizer respeito a coisas que podiam ser tocadas e sentidas, para não falar em nós mesmos, em vez de concernir a corpos distantes no espaço. A nova teoria atômica abordava alguma coisa que todo o mundo podia segurar nas mãos e em que podia pensar.

— Digamos — propôs ela — que você bata numa porta pedindo para entrar. Os nós dos seus dedos batem na madeira da porta. Toc, toc, toc. A porta é muito dura. Em certo sentido, esse bater na porta, a sensação dessa dureza, é aquilo em que a maioria das pessoas pensa, ao pensar na realidade. Ora, quando as pessoas pensantes souberam do átomo daltoniano, essa própria sensação de uma realidade do toc-toc foi derrubada. O nó dos dedos, que se compunha de pequenos átomos duros, batia na porta, que se compunha de pequenos átomos duros. Se, no final das contas, foi preciso um certo tempo para que as pessoas se acostumassem com essa ideia, isso não chegou a ser muito mau, porque aquela qualidade sólida do toc-toc transferiu-se para as pequenas esferas duras que compunham a matéria. A matéria, afinal, era matéria.

Fiquei sem saber o que ela pretendia dizer com *transferida*, de modo que lhe fiz essa pergunta.

— Refiro-me ao fato de que, quando eles se sentiam meio zonzos por pensarem que uma coisa sólida como uma porta era composta de bilhões de pequenas esferas, chamadas átomos, pelo menos podiam pensar nessas esferas, à semelhança de Dalton, como sendo duras e duráveis, tal como pensariam originalmente na porta.

— Infelizmente — acrescentou ela —, no fim do século XIX, nossa visão da matéria tornou a passar por uma modificação radical. Os átomos revelaram não ser pequenas esferas duras, mas ter uma estrutura. Mesmo sendo ainda bastante esféricos, eles passaram a consistir num núcleo minúsculo no centro, com elétrons correndo em disparada a seu redor. Entre o núcleo e os elétrons, mais de 99% do átomo era um espaço vazio.



O átomo de Rutherford

— Pois bem — prosseguiu Canzoni —, as pessoas tiveram então que lidar com uma visão da matéria que era, acima de tudo, a de um espaço vazio. Ainda assim, os elétrons que circulavam em torno dos átomos, e os prótons e nêutrons que compunham seu núcleo, continuaram podendo ser vistos como os repositórios últimos da realidade do toc-toc, embora esse jogo estivesse ficando um pouco difícil de levar adiante. Tornava-se cada vez mais difícil manter o apego ao salva-vidas intelectual da realidade tangível. E então veio o grande choque seguinte.

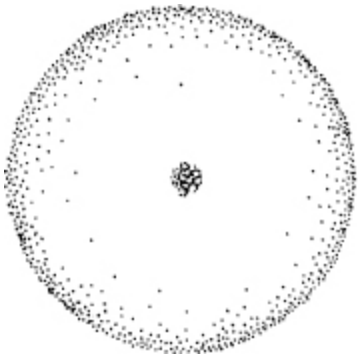
Canzoni fez uma pausa.

— Que choque? — perguntei.

— No alvorecer do século XX, o físico Einstein mostrou que a matéria e a energia eram equivalentes. Uma pequena quantidade de matéria, m, continha quantidades enormes de energia, equivalentes a mc^2, como todo o

mundo sabe. A velocidade da luz, *c*, era um número enorme e, quando elevado ao quadrado, tornava-se muito maior. Cada átomo, cada partícula de todos os átomos, quer se tratasse de elétrons, nêutrons ou prótons, continha energia, compunha-se de energia. O ponto a ser frisado era que a energia não apenas é inerente à matéria, mas é a matéria. Eu estava ficando meio incomodado com o rumo que as coisas vinham tomando. — Eu achava que a energia e a matéria eram meramente conversíveis uma na outra — comentei.

— É verdade, mas a energia está sempre presente, no cerne de cada partícula, esperando para se manifestar, por assim dizer. A energia é o componente último de toda a matéria. É isso o que eu quero dizer. Aliás, a maior parte da física do século XX diz respeito à energia. Ou ela reside por algum tempo numa partícula, ou eclode como uma onda. Todos os componentes fundamentais do átomo passaram então a ser vistos, essencialmente, como disposições de energia que geravam campos de força.



O átomo como energia

— As pessoas que ponderavam sobre a natureza última das coisas — continuou Canzoni — sentiram-se então mais perdidas do que nunca. A realidade do toc-toc havia desaparecido por completo, sendo substituída pela energia. O punho era um imenso arranjo de energia que se aproximava da porta, interagia com ela e, depois, afastava-se, enquanto a porta era um arranjo ainda maior de energia.

— Então — lembrou Canzoni —, vieram Bohr e o grupo de físicos que trabalhava com ele, conhecidos como a Escola de Copenhague. Eles desenvolveram uma visão tão bizarra da realidade atômica, que até Einstein recusou-se a acreditar nela, apesar das provas que se acumulavam sistematicamente para corroborá-la. A energia do núcleo, dos elétrons, das

ondas no espaço, de todas as manifestações da realidade, foi fragmentada em pacotes minúsculos, chamados *quanta*. A energia de um elétron solitário, em órbita num átomo de hidrogênio, não podia simplesmente assumir qualquer valor antigo, mas apenas múltiplos de um valor fundamental. Isso explicava o comportamento dos átomos excitados de hidrogênio. Eles só emitiam energia ou luz em comprimentos de onda específicos, que correspondiam a esses níveis quânticos. O nível quântico mais baixo correspondia à primeira linha do espectro do hidrogênio, que discutimos ontem. O nível quântico seguinte correspondia à linha espectral seguinte, e assim por diante.

— E então veio a revolução mais surpreendente de todas — prosseguiu Canzoni —, uma revolução tão sutil que ainda não a reconhecemos. Os instrumentos matemáticos apropriados a essa nova visão da realidade já tinham sido desenvolvidos por Newton e Leibniz no século XVIII, por Riemann e Lobachevsky no século XIX, e por muitos outros matemáticos. Estou querendo dizer o seguinte: olhe para a equação desenvolvida pelo físico alemão Erwin Schrödinger. Ela descreve os estados de energia do átomo de hidrogênio em termos das forças que unem seu elétron a seu núcleo. Veja só:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi - \frac{e^2}{r}\Psi = E\Psi$$

Eu não tinha certeza do que Canzoni esperava que eu visse. Fiquei olhando para a equação como quem esperasse vê-la desabrochar em elétrons e um núcleo. E a equação me olhava do quadro-negro, opaca e misteriosa. Como matemático, ao ser confrontado com essa fórmula, eu não chegava a estar numa situação melhor que a do chamado leigo. Talvez soubesse executar as operações indicadas pela fórmula, mas não fazia nenhuma ideia das quantidades físicas que os símbolos representavam. Talvez eu soubesse que o delta invertido, o chamado operador nabla (∇), representa um diferencial multidimensional, mas não sabia que o símbolo (Ψ) representava os níveis de energia do átomo. Isso era coisa para os físicos.

Nesse momento, Canzoni inspirou profundamente, como se estivesse prestes a mergulhar no canal abaixo de nossa sacada.

— Sabe, poderíamos dizer que essa equação é um átomo de hidrogênio!

Com certeza, pensei eu, há mais do que isso num átomo de hidrogênio. — E a energia do núcleo?

— Bem, é verdade, há mais coisas no átomo de hidrogênio do que a mera interação entre os elétrons e o núcleo. Existe o chamado modelo padrão, que é uma coletânea de equações que descreve as interações energéticas dentro do núcleo, dos quarks que compõem os nêutrons e prótons. Estou usando a equação de Schrödinger como uma espécie de símbolo de toda a descrição matemática. No momento, a equação de Schrödinger, junto com o modelo padrão, equivale a um átomo de hidrogênio, porque simplesmente não há mais nada que se possa dizer sobre ele, ao que saibamos. E, mesmo que haja mais alguma coisa a dizer, eu tenho que perguntar: você entende o que significa tudo isso?

Na verdade, eu não entendia.

— Essas equações matemáticas — esclareceu Canzoni —, inclusive as que talvez ainda não conheçamos, descrevem as relações energéticas dentro de um átomo de hidrogênio. As equações em si, no entanto, não são a energia. São apenas equações. Poderíamos chamá-las de sistemas de informação, no sentido de que, em conjunto, elas fornecem todas as informações que poderíamos querer sobre um átomo de hidrogênio. Não há nada além disso, na verdade. Pode-se dizer que nem mesmo a energia é real. Somente as informações sobre seu comportamento é que são reais.

— É isso que você quer dizer com o elefante que desaparece?

— É. O cosmo é um elefante. Examinado de perto, ele desaparece. Transforma-se em sua própria descrição.

A manhã estava-se transformando em tarde, o calor tinha invadido nossa sacada e Canzoni sentou-se para se abanar. Parecia o momento ideal para lhe perguntar uma coisa que sempre me havia incomodado.

— Eu sempre me perguntei sobre a estrutura última dos átomos. Você delineou o que eu chamo de *regressão*, na qual a matéria se compõe de átomos, os átomos se compõem de núcleos e elétrons, os núcleos se compõem de nêutrons e prótons e estes, por sua vez, compõem-se de quarks e outras coisas, segundo suponho. Isso tudo tem um fim, ou essa estrutura prossegue indefinidamente?

Eu não queria desviar o curso de pensamento de Canzoni, mas não consegui resistir a fazer a pergunta. Ela respondeu: — O físico teórico Steven Weinberg acha que o que você chama de regressão deve ter um fim.

Ele acredita que logo chegaremos ao fim das fórmulas e saberemos tudo o que há para saber sobre a física. O cosmo se fundamentará num conjunto finito de axiomas, que, por sua vez, residem no holos. Mas eu não sou dessa opinião. A coisa se resume no seguinte: será que continuaremos eternamente fazendo descobertas substancialmente novas sobre o cosmo, ou irá esse processo terminar um dia, como afirma Weinberg?

— Essa pergunta — prosseguiu ela — tem muitas implicações profundas para nós. Por que deveria haver um fim das descobertas? Por que seria o cosmo weinberguiano regido por um conjunto de axiomas que, quando comparado ao próprio holos, é quase insignificante? Por que não seria o cosmo regido por todo o holos? Tenho motivos para crer que não haverá um fim das descobertas, ou, pelo menos, não um fim das coisas que precisam ser descobertas. Na verdade, o que talvez seja a parte maior de todas ainda está por descobrir, por enquanto.

Eu estava começando a me sentir cada vez mais esquisito, como se nossa conversa estivesse alterando a realidade a nosso redor. A sacada, o quadro-negro e o bule de café haviam adquirido uma qualidade efêmera e transitória, como se estivessem prestes a desaparecer. Canzoni havia começado a tremer.

— Você está se sentindo bem? — perguntei.

Ela abanou o rosto nervosamente com a mão.

— É o *scleroso*. O calor não ajuda em nada. Você sabe onde fica o meu escritório. Incomoda-se de ir até lá buscar uma coisa? É um vidro que está no canto da minha escrivaninha. Traga-o aqui, por gentileza. Fui rapidamente à sala dela, encontrei o vidro e voltei com ele.

— Fico muito constrangida por você me ver assim. Às vezes sinto muita dor e fico tonta com muita facilidade.

Então, de repente, ela se levantou. — Talvez eu precise comer alguma coisa. Vamos almoçar?

Fomos a um pequeno *ristorante* com mesinhas do lado de fora, que não ficava longe de Rialto. Canzoni pareceu-me mais refeita, falando animadamente sobre as contribuições italianas para a ciência e a matemática nos últimos cinco séculos. De Fibonacci a Fermi, a Itália havia contribuído com uma cota mais do que significativa para a ciência europeia. Aos poucos, entretanto, a animação de Canzoni foi-se esvaindo, à medida que ela me falava de sua vida como jovem física no CERN, em Genebra.

Nesse centro de pesquisa, com uma animação crescente, ela vira o gigantesco acelerador revelar novos fenômenos nas trajetórias espiraladas das partículas subatômicas. Assistira à geração de pares, partículas e antipartículas sendo congeladas pela energia do grande feixe do acelerador. Fora testemunha ocular do esvaecer do próprio substrato da realidade. O que teria levado ao término de sua carreira lá? A expressão de Canzoni toldou-se.

— Havia um homem lá, um homem em quem eu confiava. Posso até confessar, aqui entre nós, que eu nutria certos sentimentos amorosos por ele. Ao mesmo tempo, eu estava formulando uma espécie de hipótese sobre o *Mondo Mathematica*, como o chamava na época. Mas, quando compartilhei essas ideias com meu amigo, ele se tornou sumamente hostil, rindo na minha cara e me chamando de tola, com todas as letras. Na época, fiquei chocada e magoada, mas ultimamente, com o correr dos anos, percebi que aquelas ideias talvez o tivessem assustado ou ameaçado de algum modo. Meses depois, alguém entregou um relatório sobre o meu desempenho, dizendo que eu não tinha publicado muita coisa durante a época em que havia estado lá e que não estava dando o melhor de mim, como eles costumam dizer.

— Você acha que o seu pretenso amigo estava por trás disso? — perguntei.

— Ah, quem sabe? No que eles chamam de “ciência pesada”, há uma certa burocracia que entra em cena. Há uma tensão, uma espécie de luta pelo poder entre os mais ambiciosos. Saí de lá com elegância, eu acho, encontrando por mera sorte esse cargo na Università Ca’Foscari di Venezia, na cidade onde eu nasci.

Nesse exato momento, seu aluno da pós-graduação, Emilio, passou por lá, viu-nos e veio para nossa mesa. — *Buon giorno, professori*. Dra. Canzoni, estou com o artigo que a senhora me pediu que arranjasse para seu visitante.

Emilio entregou a Canzoni um pequeno artigo, que ela me passou na mesma hora.

— Nunca tentei publicar isso — disse-me —, porque sei que não será aceito e até provocará risadas. Mas você é a pessoa ideal para eu entregá-lo. Se escrever sobre as ideias que andou encontrando, certifique-se de incluí-lo, porque essa será minha única chance de publicar e divulgar minhas ideias, de certa maneira.

O artigo era bem curto, e mais formulado como um manifesto do que como um artigo científico. Na verdade, Canzoni não havia tentado redigir um artigo, por não ter esperança de vir a estabelecer suas ideias com alguma coisa que se parecesse com o rigor físico (muito menos matemático). No meio do texto, encontrei uma tese, enunciada em três partes:

A TESE DE CANZONI

1. As conclusões da matemática, tanto conhecidas quanto desconhecidas, aplicam-se plenamente a qualquer objeto, abstrato ou concreto, que satisfaça a um sistema axiomático.
2a. Algumas coisas do cosmo satisfazem a um sistema de axiomas. (forma fraca)
b. Tudo no cosmo satisfaz a sistemas de axiomas. (forma forte)
3. O cosmo é a verdadeira intersecção de tudo o que há na matemática. (teoria superforte)

— O que você quer dizer com verdadeira intersecção? — perguntei.

— É o seguinte. Pense, por um momento, numa partícula. O comportamento dela é regido por certas leis matemáticas. Sua posição, o tempo de sua existência, seu momento e energia, tudo isso é governado por uma ou outra equação que expressa o funcionamento dessas leis. Poderíamos dizer que as leis que se aplicam a essa partícula fazem uma interseção ou se juntam nessa partícula.

—Agora — prosseguiu —, por que as leis específicas que descobrimos até hoje haveriam de se aplicar ao cosmo, e não outras, é uma grande questão. Quer haja ou não outras leis a serem descobertas, eu diria que cada partícula e cada onda têm que se manifestar onde se manifestam e se comportar como se comportam, por causa do holos. Sabe, o holos contém toda a matemática, tanto a que nos é conhecida quanto a que ainda está por ser descoberta, o que é de longe a maior parte. Na verdade, você pode ter certeza de que não há um fim da matemática, seja qual for a situação da física.

— É assim que eu imagino a coisa — ela esclareceu: — os componentes fundamentais do cosmo, quer terminem ou não terminem nos quarks, satisfazem não apenas os axiomas contemplados por Weinberg, mas também muitos outros. Como é que podemos atrever-nos a dizer que conhecemos todas as leis ou axiomas satisfeitos por um átomo de hidrogênio, por exemplo, quando nem sequer conhecemos a fração mais diminuta do que existe no holos? O que eu chamo de verdadeira intersecção

do holos é o conjunto de todos os axiomas que se aplicam a um átomo de hidrogênio e a outras coisas.

— Desculpe-me — interrompi. — Não entendo muito bem o que realmente faz com que um átomo de hidrogênio se manifeste.

Ela me olhou com a mesma expressão triste no rosto. — Para ser franca, nem eu. Eu diria que falta alguma coisa muito importante na física. Mas, a meu ver, é mais provável que uma teoria final de tudo se assemelhe mais ao esboço que acabei de lhe entregar do que à imagem atual da física padrão.

— Mas, o que é que falta na física? — perguntei.

— Isso não é fácil de dizer, porque é ainda mais esquisito do que o que eu já lhe mostrei. Que é que falta na física? — perguntou ela com um suspiro profundo. — A mente.

Senti-me subitamente apreensivo, como se tivesse passado dois dias com uma louca, sem nem mesmo desconfiar disso.

— A mente?

— A física lida com o que chamamos de “matéria”. Até o começo deste século, não parecia haver nela espaço para a mente, para os fenômenos mentais. Mas aí veio a mecânica quântica, desencadeada em parte por Balmer e por sua descoberta da fórmula dos comprimentos de onda do átomo de hidrogênio. Em seguida, Niels Bohr e a Escola de Copenhague levaram essa nova visão da matéria a sua conclusão lógica. Para Einstein, não era realmente a descontinuidade da matéria ou da energia que incomodava, mas uma coisa muito diferente, um fator que era inteiramente novo na física: a indeterminação.

A voz dela foi baixando, como se Maria houvesse esquecido o que ia dizer em seguida.

— Que tipo de indeterminação?

— O comportamento aleatório. Existem vários arranjos experimentais que obrigam uma partícula fundamental, como um fóton, a escolher a trajetória que ele vai seguir desde sua fonte até algum tipo de detector. Essa escolha, no que concerne à Escola de Copenhague, é completamente aleatória.

— Você quer dizer que o fóton entende que tem uma opção?

— De modo algum, ou, pelo menos, não se eu tiver que falar em nome da comunidade mais ampla dos físicos. É simplesmente imprevisível, em princípio, o canal que o fóton irá escolher. Einstein combateu essa ideia até

a morte, mas a mecânica quântica é uma das teorias mais bem-sucedidas que a física já conheceu, pelo menos até hoje. E há mais, muito mais do que isso.

Canzoni levantou-se para esticar as pernas, e Emilio e eu nos levantamos junto com ela. — Acho melhor voltarmos para o escritório — disse. — Explicarei mais sobre a matéria da mente no caminho.

Era difícil escutá-la em meio ao vozerio e aos gritos dos vendedores ambulantes na calçada paralela ao canal. Eu tinha que ficar segurando o gravador acima do ombro de Canzoni para captar sua voz. Só quando voltei para meu quarto de hotel, naquela noite, foi que finalmente pude ouvir tudo.

— Você já ouviu falar do físico Eugene Wigner, que recebeu o Prêmio Nobel? Ouviu? Bem, uns quarenta anos atrás, ele escreveu um ensaiozinho muito interessante, que você deve conhecer. Chama-se “A Absurda Eficácia da Matemática nas Ciências Naturais”. Ele disse que simplesmente não há nenhuma explicação racional da razão por que a matemática desempenha um papel tão crucial na física; não há nenhuma razão para ela ser tão útil, mas ela é. Sabe, a grande maioria dos físicos simplesmente aceita o que disseram Einstein ou Bohr, ou alguma outra pessoa, e fica muito contente em aplicar essas teorias em seus laboratórios ou seus quadros-negros. Além disso, muitos deles, a maioria, eu diria, não recua nem por um momento para gritar, como gritou Wigner, por assim dizer: “Santo Deus! O que esse elefante está fazendo aqui?”

As pessoas paravam na rua para nos ver passar. Emilio dava-lhes sorrisos simpáticos, mas Canzoni não parecia reparar.

— Como eu tenho certeza de que você deve saber, há algo a mais acontecendo na mecânica quântica. Ela parece implicar a consciência humana como um ingrediente fundamental. Constata-se que a mecânica quântica tem seu maior sucesso quando presume que não há nenhum modo de isolar o observador do experimento. A menos que alguns fenômenos sejam observados, eles simplesmente não acontecem.

— Que tipo de fenômenos?

— Suponhamos que você dispare fótons de uma fonte em direção a um par de ranhuras muito próximas. Se você não interferir nos fótons, eles interferirão um no outro, por assim dizer. Numa tela colocada por trás da ranhura, você verá um padrão de interferência no lugar onde os fótons agiram como ondas, anulando ou reforçando uns aos outros, dependendo do

ponto a que chegarem na tela. No entanto, se você tomar alguma medida para observar por qual das ranhuras os fótons passarão, destruirá o padrão de interferência. Presume-se que a sua consciência dos fótons seja o que altera o comportamento deles. Pelo menos, é nisso que acreditam alguns físicos.

— Por exemplo — continuou ela —, Wigner acreditava, e não apenas acreditava, como encontrou nesses fenômenos quânticos uma possível fonte de um material inteiramente novo para a física: a consciência.

— Você quer dizer que algum físico realmente elaborou uma teoria da consciência?

— Infelizmente, não. Talvez não haja esperança para esse projeto, mas o que eu acho é o seguinte. Não há dúvida de que a consciência envolve uma ordem de realidade física completamente diferente da matéria e da energia comuns. Você pode ter certeza de que a consciência nunca se desenvolverá num computador, não importa como ele seja programado, porque os computadores são projetados para fazer justamente uma triagem dos fenômenos de que depende a consciência. Os computadores são feitos para resistir aos erros, ou ao ruído aleatório, às flutuações quânticas nos estados de bilhões de transistores minúsculos.

— Deixando de lado os computadores — prosseguiu ela — nós, os seres humanos, temos consciência. Será que nosso cérebro envolve apenas neurônios e pulsos que transitam entre eles? Não, acontece mais alguma coisa, que, no momento, ultrapassa inteiramente a nossa compreensão.

— O que falta na física — disse ainda Canzoni — é exatamente o que falta em nossa visão atual do cérebro. O que falta na física é o mecanismo ou a força, ou… seja lá o nome que você lhe dê, que faz com que a matemática influencie as coisas, por assim dizer. O que falta é aquela coisa que faz com que os fenômenos se manifestem e deixem de se manifestar, como as ideias que vêm e vão. Pois eles são como ideias que vêm e vão, entende?…

A voz dela foi-se extinguindo. — Lamento estar sendo tão vaga — disse. Pygonopolis talvez chamasse isso de *menos*, que é a palavra grega para “vontade” ou “espírito”.

Canzoni tinha recomeçado a tremer. Por sorte, já havíamos chegado a seu prédio. Subimos a escadaria escura em silêncio. Só quando me sentei do outro lado de sua escrivaninha foi que ela concluiu o raciocínio. — É mais

ou menos o seguinte, em linhas muito gerais. Existe algo como a consciência, que permeia o cosmo. Para evitar conclusões prematuras ou analogias indesejadas, vamos dar-lhe um nome neutro, digamos, o *menos*. A natureza de sua existência é completamente diferente da matéria e da energia, mas ele funciona como uma *materium primum*, a base de muitos fenômenos. Por conseguinte, existe um *menos* que perpassa tudo, e em cada um de nós há um pedacinho dele, que é nossa consciência, aquela de que nosso cérebro é o anfitrião. Não estou dizendo que o *menos* seja unificado em nenhum sentido, mas apenas que esse fenômeno perpassa a realidade tal como ainda estamos por conhecê-la.

— E essa consciência global tem alguma coisa a ver com a matemática?

— A grande consciência é o ingrediente que falta, acho eu. Só através dessa consciência, ou por meio dela, é que, de algum modo, a matemática se manifesta no cosmo. É possível até que tenhamos que nos conciliar com a ideia de nunca virmos a saber.

— Por quê? — indaguei.

— Por causa do que chamo de “cortina quântica”. Ela se coloca entre nós e os fenômenos mais profundos. A cortina consiste no comportamento essencialmente aleatório das partículas fundamentais. O comportamento delas é imprevisível, em princípio. No entanto, pode haver alguma coisa atrás dessa cortina, alguma coisa que determine os eventos quânticos, mas que ainda não é previsível para nós. Atrás da cortina quântica talvez esteja a consciência global. Se o holos fica em algum lugar, é lá.

Meu avião não tardaria a partir. Eu não compreendia todas as observações de Canzoni, pelo menos não com muita clareza, mas era certo que teria alguma coisa em que pensar durante meu voo para a Inglaterra. Considerando-se sua tese, Canzoni só poderia ser descrita como uma pitagórica de livro. Mas a tese, por mais fascinante que fosse, tinha sido um pouco obscurecida por uma profusão de imagens, o que é sempre um sinal da mente tateante. Havia o elefante invisível, aquele em que o cosmo desaparecia ao ser examinado de perto, havia o *menos*, ou o vasto campo de consciência que supostamente perpassava tudo, e havia a cortina quântica, atrás da qual não conseguíamos enxergar. Minha busca havia tomado um rumo súbito e imprevisível. O que teria a dizer sobre tudo isso o meu anfitrião seguinte, Sir John Brainard?

PARTE IV

AS MÁQUINAS DE PENSAR

CAPÍTULO 7

HORPANDO OS ZUQUES

Oxford, Inglaterra, 29 de junho de 1995

Enquanto meu trem seguia velozmente para o norte, indo de Londres para Oxford, o verso “As terras verdes e aprazíveis da Inglaterra” ressoava em minha lembrança. Seria de William Blake? Sem dúvida fazia um dia verde e aprazível. Vez por outra, a paisagem se alteava, ora fechada por cercas de pedra, ora pontilhada de ovelhas. Noutros trechos, o trem descia para o vale do rio Tâmisa, onde barcos de passeio e uma ou outra balsa deixavam esteiras na água.

Quando o trem parou na estação de Oxford, desembarquei na plataforma sabendo perfeitamente que meu anfitrião não estaria à minha espera. Afinal, tratava-se de Sir John Brainard, catedrático do Merton College e renomado por sua apreensão global da matemática. Tinham-me dito para não esperar que Brainard fosse receber-me, porque (a) ele estava extremamente idoso e (b) de qualquer maneira, ninguém devia ter a pretensão de ser recebido por tamanho luminar. Assim, chamei um táxi para me levar ao centro da cidade, onde finalmente encontrei o grande homem à porta de sua faculdade. Enquanto ele falava com o porteiro, fiquei ali por perto, de mala na mão, na esperança de ser notado. Finalmente, Brainard voltou-se para mim. — Santo Deus! Você não é o tal de Dewdney que eu estou esperando, é?

Tentei desesperadamente pensar em alguma coisa inteligente para dizer, mas só consegui produzir um resmungo.

— Depreendo que você é ele, portanto.

Sir John apresentou-me ao porteiro, explicando que eu podia deixar minha mala com ele enquanto dávamos um passeio pela margem do Cherwell (um afluente do Tâmisa em Oxford).

— Tomei a liberdade de lhe fazer uma reserva no Churchill Hotel, se isso lhe for aceitável. Todos os meus colegas mais moços parecem achar que a maneira de tratar um convidado, depois de uma viagem cansativa, é levá-lo prontamente para o bar mais próximo e enchê-lo de cerveja até ele mal se aguentar em pé. Não é bem a coisa indicada para uma mente lúcida. Além disso, você me parece o tipo de sujeito que prefere o ar puro ao cheiro de fumaça e lúpulo.

Brainard levou-me para dar uma volta pela faculdade e por uma área gramada que mais parecia um parque, às margens do Cherwell. Algumas pessoas passeavam por uma trilha, virando-se de quando em vez para olhar uma chalana que subia lentamente a correnteza. Olhei de soslaio para meu anfitrião. Certamente era muito idoso, mas tinha aquela idade indeterminada que é própria das lendas. Sua cabeleira era um vasto emaranhado branco e rebelde, e suas sobrancelhas eram tão compridas que senti uma vontade irracional de passar-lhes uma tesoura. Ali estava ele a meu lado, a última pessoa, segundo diziam, com uma completa compreensão de toda a matemática, e autor de *The Mathematikon*. Diziam que, além de sua produção prodigiosa de artigos em todas as áreas concebíveis da matemática, ele tinha prateleiras repletas de textos não publicados, dois dos quais fariam a reputação de qualquer pós-doutorando em começo de carreira.

— Devo dizer que simpatizo muito com a sua busca — disse ele em tom gentil. — Mas, a meu ver, você formulou uma espécie de falsa antinomia, ao indagar se a matemática é criada ou descoberta.

— Perdão? — disse eu. Mal havíamos passado das amenidades, e eu já me sentia meio perdido.

— Dizer que a matemática é descoberta é pressupor que ela já exista em algum sentido. No entanto, dizer que é criada implica que ela não existisse anteriormente. Mas, como se poderia determinar a questão da sua existência, e muito menos da preexistência, aí está uma coisa que francamente ultrapassa em muito a minha capacidade… e a sua também, suspeito.

Ele se voltou para me fitar. Seus olhos eram de um azul surpreendentemente pálido e meio lacrimejantes. E Brainard estava falando sério.

Tentei uma outra tática. — Mas, não seria possível dizer que a matemática parece ter uma existência independente?

— Ah, você disse “parece”. Já é um progresso. Mas, como responder a essa pergunta? De que tipo de existência você está falando? Existência física?

— Bem, eu suponho que não — disse eu —, mas a relação íntima entre a matemática e a física, o próprio poder que ela confere à física, faz com que eu me pergunte se a matemática existe, em algum sentido, nos bastidores, assim como a física existe diante de nossos olhos.

— Ah, o espírito de Oxford já começou a perpassá-lo — retrucou Brainard. — Com o tempo, se você se demorasse o bastante entre essas torres sonhadoras, deixaria de ter qualquer coisa remotamente semelhante ao pensamento.

Deu uma risada alta, que assustou uma criança e sua babá. Eu tinha levado todo esse tempo para perceber que Brainard estava brincando comigo, testando-me. Mas eu sentia nele um certo nervosismo, como se, na verdade, ele fosse uma pessoa bastante tímida. Expus o assunto com toda a clareza que me era possível: — O senhor não pode ter vivido tanto tempo, ou produzido tantos resultados significativos, sem ter refletido profundamente sobre essa questão, ou, pelo menos, sobre como seria possível formulá-la.

— Muito bem colocado! Paixão e paciência, e uma pitada de lisonja, um apelo que me comove. E com isso, podemos começar. Haverá alguma coisa que se possa chamar de um lugar em que a matemática existe? Bem, ela certamente existe em nossa mente. Eu poderia acrescentar, caso você ache que esse é um tipo de existência precário, que as coisas da mente são tão reais quanto qualquer outra parte do mundo físico. A menos que você esteja disposto a invocar um elemento divino ou místico, qualquer coisa que tenha efeitos físicos deve ter, ela própria, uma existência física. E a mente, como todos sabemos, pode ter efeitos físicos do tipo mais profundo. Portanto, de um modo indireto, posso dizer que, não importa onde mais esteja a matemática, ela também faz parte do mundo físico.

— Mas, não se poderia dizer a mesma coisa dos unicórnios? — perguntei.

— E dos leões também — retrucou Brainard no ato. — Mas estou-me referindo à realidade dos conceitos e das operações mentais, e não a coisas físicas como leões e unicórnios. E devo adverti-lo de que nem todos os conceitos e operações mentais são iguais. Como quer que se diga que a matemática existe, insisto na mente como seu palco principal.

Achei essa resposta meio decepcionante. Para levá-lo de volta à ideia de uma existência que independesse da mente, falei-lhe de Pygonopolis e de seu conceito do holos.

— Holos! — exclamou Brainard. — É, bem, isso soa terrivelmente grego. Apesar de estarmos cercados por uma universidade que se especializou em grego durante muitos séculos, não tenho a mais remota ideia do que significa essa palavra. É de Platão? — perguntou.

Respondi que o termo significava “o todo”, e fora recentemente cunhado para denominar o mundo que Pitágoras julgava estar subjacente a toda a vida. Assinalei que, na verdade, Pitágoras achava que o mundo era feito de números.

— É, sei, todos nós ouvimos falar desse clichê — retrucou Brainard com certa impaciência. — Mas, como não tenho a menor ideia do que significa a palavra *holos*, não vou usá-la. Tenho a impressão de que você quer que eu invente uma expressão como País da Matemática, o que, no fim das contas, não garante nada mais sério que o País das Maravilhas, como em *Alice no País das Maravilhas*… A propósito, espero que você se dê conta de que Oxford foi a casa de Lewis Carroll, numa certa época.

Eu tinha uma vaga ideia.

— O verdadeiro nome dele era Charles Dodgson, um professor da Christchurch, logo ali atrás. Não era mau para um matemático, mas não deixou nenhum trabalho sério de que se possa falar. Certamente gostava de jogos e, já que estamos no assunto, de garotinhas. A tese é que ele sublimou suas pulsões e, em consequência disso, produziu um maravilhoso mundo da fantasia, no qual seu coração pôde demorar-se em Alice ou discorrer com vagar sobre ela, eternamente. A Alice original era filha do decano Liddell, do Dodgson’s College. Ele a tratava com extremo respeito, embora se soubesse que a tinha fotografado nua.

A conversa parecia estar tomando um rumo pouco saudável. Atrevi-me a interromper Brainard.

— Se não é o País da Matemática, é o quê?

— Nas minhas leituras informais, só encontrei uma tentativa de se descrever a matemática como um lugar separado. Você já ouviu falar do Mundo Três?

— Nem sei o que seriam os Mundos Um e Dois!

— Bem falado. O Mundo Três é uma invenção, senão uma descoberta, de dois cavaleiros do reino: Sir John Eccles e Sir Karl Popper. Juntos, eles colaboraram num livro chamado *O eu e seu cérebro*. Nele, esses eminentes pensadores, um deles neurofisiologista, o outro, filósofo, fazem um esboço de três mundos, numa tentativa de descrever o papel especialíssimo desempenhado pela consciência humana no mundo físico.

Foi um choque para mim. Repreendi-me por já não saber disso. Chegava até a me lembrar de ter visto críticas do livro, mas, por não me interessar particularmente pela neurofisiologia, eu as deixara de lado. Ao mesmo tempo, a menção da palavra "consciência" fez-me lembrar imediatamente de Maria Canzoni e de sua afirmação de que a consciência desempenhava um papel especial na física. Com certa humildade, perguntei a Brainard sobre os três mundos de Eccles e Popper.

— O Mundo Um consiste nos objetos físicos, esse tipo de coisas que a gente pode ver, sentir ou empurrar de um lado para outro. Poderíamos chamá-lo de mundo da realidade física. O Mundo Dois consiste nos estados da mente humana, tanto conscientes quanto inconscientes. Esse mundo pode exercer um impacto direto no Mundo Um, bem dentro do espírito do que discutimos há pouco. Os estados mentais, particularmente os atos de vontade, podem surtir um efeito direto no mundo físico.

Ele fez uma pausa prolongada, o que me levou a pressioná-lo um pouquinho mais. — E o que é o Mundo Três?

— O Mundo Três, se entendo corretamente, consiste em todos os produtos da mente humana, desde a música até a matemática. Ah, pelo modo como o seu rosto se ilumina, vejo que estou chegando perto de alguma coisa! Acho que é Popper, o filósofo, quem se debate com a forma de existência dos objetos do Mundo Três. Considere a música, por exemplo. A música são as notas num papel, os sons produzidos por uma sinfonia, ou o sulco de um disco gramofônico? Ela é todas essas coisas, é claro, mas também não é nenhuma delas. O Mundo Três é real porque, seja qual for a forma que a música acabe assumindo no mundo real, ela também tem efeitos físicos diretos. Em certo sentido, ela faz com que os vários tons dos músicos e dos instrumentos de uma grande orquestra ribombem com uma explosão de Beethoven.

Surpreendentemente, até então não me havia ocorrido que a matemática não era o único campo em que os objetos não tinham uma definição última.

Lembrei-me das tentativas de Pygonopolis de descrever a realidade última dos números e dos esforços de al-Flayli para descrever o círculo ideal.

Brainard continuou: — Ora, você pode chamar de Mundo Três o lugar onde a matemática existe, se quiser, mas esse conceito me parece falho em vários aspectos. Primeiro, ele coloca a matemática em pé de igualdade com os padrões estáticos que compõem seu conteúdo. Não importa o que mais seja a música, ela tem que ser um padrão estático. O Mundo Três só faz sentido, como conceito filosófico, se você incluir todas as sequências possíveis de bits binários. Como todos entendem hoje em dia, graças à era do computador, eles são capazes de codificar toda a música, toda a arte, toda a literatura, junto com toda sorte de padrões sem sentido. Quem é que sabe dizer o que é a arte, seja a já realizada ou a potencial… especialmente hoje em dia? — disse Brainard, com um risinho abafado. — Isso veio do Borges, eu acho.

Deixei passar este último comentário. — Popper e Eccles afirmam que o Mundo Três tem existência independente?

— Sim, com certeza. A questão, a meu ver, é apenas que eles não reconhecem que a matemática existe num nível superior, em certo sentido. Ela *diz respeito* às sequências em si, entre outras coisas.

— Francamente — continuou ele —, estou muito mais interessado em como praticamos a matemática. Qualquer exame da matemática e do tipo de realidade independente que ela possa ter ou deixar de ter precisa começar pela mente. O que você talvez não perceba, no entanto, é que o que eu pretendo dizer com *mente* é muito mais do que a simples mente humana.

Espichei as orelhas.

— As operações mentais do tipo que possibilita a matemática não se restringem aos seres humanos, como você verá. Aliás, um grande tema da matemática neste século tem sido a desvinculação entre a matemática e a mente humana, se posso me expressar com essa crueza. Essa constatação proveio, em parte, do método axiomático, pelo qual alicerçamos boa parte da matemática numa base mais ou menos inatacável. Depois farei referência a outros fatores que contribuem para isso, mas, por enquanto, vamos concentrar-nos nos axiomas. Nossa história começará pelo fenômeno central, o pensamento matemático.

Sentamo-nos num banco, com o sol do fim de tarde filtrando-se por entre as árvores e iluminando um cachimbo pesado que Brainard tirou do bolso

do colete.

— Que coisa esplêndida é o sol! — comentou ele, enquanto acendia uma mistura aromática. — Não o incomodo, eu espero.

Sacudi negativamente a cabeça.

— O pensamento matemático não se parece nem um pouco com o pensamento comum — continuou Brainard. — Suas ideias concentram-se, da maneira mais extraordinária, em objetos tão extremamente simples, tão desprovidos de detalhes, que é possível compreendê-los em sua íntegra. Simplesmente não há mais nada a entender num número senão a quantidade que ele representa. Essa ideia da quantidade, esse conceito, tem a característica especial de ser idêntico em todas as pessoas que o entendem. Sem dúvida, toda mente abriga uma pletora de ideias idiossincráticas associadas, que esvoaçam em torno da fogueira central, mas elas não desempenham nenhum papel na ação que essa ideia tem.

— Por exemplo — prosseguiu —, algumas palavras matemáticas são termos bastante comuns, como *grupo*, *normal*, *função*, e por aí vai. Mas, em sua utilização matemática, elas têm pouco ou nada em comum com seu uso corriqueiro, de modo que as pessoas que deparam com essas palavras pela primeira vez, num contexto matemático, tendem a importar significados da vida cotidiana, com isso toldando sua compreensão.

Ocorreu-me uma ideia divertida. — O senhor está dizendo — perguntei — que a maioria das pessoas tem dificuldade de entender a matemática porque ela é simples demais?

— Uma ideia crucial! — exclamou Brainard, dando um tapa no joelho, o que fez as cinzas do cachimbo rolarem por suas calças, num acidente em que ele não pareceu reparar.

— Deixe-me dar-lhe um exemplo da incrível simplicidade que há no coração da matemática — disse ele. — Vou criar um sistema de axiomas em que todos os conceitos centrais são palavras que você nunca ouviu antes, com isso evitando qualquer possibilidade de confusão. A propósito, se alguma palavra que eu usar lhe parecer inventada pelo Lewis Carroll, pelo menos adquiri essa arte honestamente.

— Nosso tema — propôs ele — são os blorgs. O que é um blorg? Primeiro, um blorg compõe-se de zuques. Segundo, você pode horpar um zuque com outro e o resultado será sempre um zuque.

Minha mente já estava dando voltas, como se eu tivesse voltado a meus tempos de estudante universitário. Ali estavam três termos completamente desconhecidos, e Brainard mal havia começado.

— Admito que o blorg seja uma coisa composta de zuques, mas tenho algumas dúvidas sobre o horpar. O que é horpar, exatamente? Você pode me dar um exemplo?

Ele mesmo respondeu: — Eu já lhe disse: horpar é o processo que você aplica a dois zuques para obter um terceiro. Os exemplos são extraordinariamente fáceis de produzir. Entenda, ainda não acabei propriamente de definir um blorg, mas, se você deixar que eu chame de semiblorg a coisa definida até aqui, eis um exemplo.

Brainard, que já estava de bloco e caneta preparados durante todo esse tempo, rabiscou uma tabelinha para que eu a examinasse.

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	c	a	b

— Você pode chamar isso de tabela de horpagem de um determinado semiblorg — esclareceu. — Está tudo aí. Nesse caso particular, os zuques chamam-se *a*, *b* e *c*. E se você quiser horpar o zuque *a* com o zuque *b*, por exemplo, terá que ir até o ponto em que a fileira *a* encontra-se com a coluna *b*. Nessa intersecção, você encontrará *c*. Em outras palavras, se você horpar o zuque *a* com o zuque *b*, obterá o zuque *c*. O que poderia ser mais simples?

Para ter certeza de estar entendendo Brainard, perguntei-lhe se todos os semiblorgs poderiam ser expressos por essa tabela.

— Oh, sim, com certeza — respondeu ele. — Pelo menos os blorgs finitos. Você deve notar que eu não disse nada sobre o número de zuques que pode haver num semiblorg. Os axiomas que estou construindo admitem um número finito ou um número infinito de zuques. Também devo mencionar que não ficamos restritos a tabelas, quando se trata de produzir semiblorgs reais. Por exemplo, eu poderia introduzir uma notação especial para a horpagem: digamos, um sinal de grade. Assim, a seguinte

equaçãozinha é equivalente a consultar o resultado da horpagem do zuque *a* com o zuque *b* na tabela:

a # b = c

Fiz um rápido cálculo mental. — Em outras palavras, se o senhor listasse mais oito dessas equações, especificaria esse semiblorg específico tão integralmente quanto a tabela?

— Correto. Afinal, só existem nove horpagens possíveis na tabela. Para obter outro semiblorg, basta fazer uma nova tabela. Continue usando letras alfabéticas, tantas quantas lhe aprouver, e preencha as tabelas com essas letras da maneira que mais lhe agradar. O resultado será sempre um semiblorg. Infelizmente, a mesma coisa não se aplica aos blorgs, de modo que é melhor seguirmos em frente, para concluir os axiomas do blorg.

— Ah, a propósito — continuou ele: — a introdução da notação especial para a horpagem, o sinal de grade, ilustra o poder da boa notação. No desenvolvimento que virá agora, se só dispuséssemos da representação tabelada para os blorgs, ficaríamos praticamente perdidos quando se tratasse de sondar a estrutura matemática ou de expressar as ideias que tivéssemos sobre os blorgs. Você vai ver como o sinal de grade é útil. Não há nada como uma notação eficaz para guiar a máquina do pensamento pelos trilhos da descoberta.

— Você há de estar lembrado — disse ainda Brainard — de que o semiblorg é o que definimos até agora com os zuques e a horpagem. O blorg, portanto, é apenas um semiblorg com mais alguns axiomas. O axioma seguinte se refere a um zuque muito especial, que chamo de gadzuque.

Brainard manteve no rosto uma expressão impassível, de modo que disfarcei meu risinho irônico.

— O gadzuque tem a propriedade de que, se você o horpar com qualquer outro zuque, chegará de novo ao mesmo zuque. Veja. Suponhamos que o zuque *z* seja o gadzuque. Nesse caso, para qualquer outro zuque, digamos, *a*, temos o seguinte:

z # a = a e a # z = a.

Ora, além do gadzuque, acontece uma outra coisa com o blorg, uma coisa que justifica a introdução do gadzuque. Para cada zuque de um blorg, existe um antizuque. Além disso, quando se horpa um zuque com um antizuque, sempre se obtém o gadzuque, invariavelmente.

— Isso parece física — comentei.

— Talvez — disse Brainard, com um leve toque de irritação —, mas é mera coincidência. Se escolhesse palavras diferentes, eu poderia fazer com que isso soasse como tricô, mas seria exatamente a mesma coisa.

— O blorg pode ter mais de um gadzuque? — perguntei.

— Excelente pergunta — entusiasmou-se ele. — Vamos considerar essa questão neste instante. Mesmo sem o próximo axioma, que será o último, podemos investigar sua pergunta. Suponhamos que um blorg, tal como definido ou transformado em axioma até aqui, possa ter dois gadzuques. Vamos chamá-los de z e z'. Pelo axioma do gadzuque, sabemos que, quando se horpa o primeiro gadzuque com qualquer outro zuque, obtém-se novamente o outro zuque. Assim, se você horpar o gadzuque z com o gadzuque z', que afinal continua a ser um zuque, obterá z' outra vez. Aqui está:

z # z'= z'

Pelo mesmo axioma, podemos inverter a ordem da horpagem e obter o mesmo resultado.

z'# z = z'

Mas, ao aplicarmos o mesmo axioma ao outro gadzuque, z', e o horparmos com o gadzuque z, teremos que ter

z'# z = z

Isso significa que z e z' devem ser o mesmo zuque, pois os dois são iguais à mesma coisa.

Fazia algum tempo que eu sabia que haveria outros axiomas escondidos, não apenas os axiomas do blorg que Brainard estava expondo, mas toda uma sequência de axiomas referentes à dedução, que era o aparato que Brainard estava usando, sem explicitá-lo. — O senhor não estaria

invocando um axioma fora do sistema que está definindo? Não estaria usando o axioma da igualdade? Sabe, isso remonta ao Euclides tradicional: “As coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si”.

Hmmmm — foi a resposta. — Eu tinha esperança de que você não mencionasse isso. É, na verdade apenas usei o chamado axioma da igualdade. E sim, ele pertence a um outro conjunto de axiomas, que é aplicado mais ou menos universalmente a todo o raciocínio matemático. Mas também vou falar disso depois. Por enquanto, por favor, vamo-nos ater aos blorgs. Respondi a sua pergunta sobre a singularidade do gadzuque e estou prestes a expor o último axioma. Nunca se sabe quando o Olimpo servirá a poção letal a este velho Sócrates.

— Por último — continuou Brainard —, você pode horpar três ou mais zuques sucessivos num blorg, sem se preocupar com o resultado. Suponhamos que eu escrevesse a operação de horpar três zuques sucessivos:

a # b # c

O que significa isso? Como você só pode horpar dois zuques de cada vez, terá que indicar, talvez por uma notação entre parênteses, qual dos pares de zuques quer horpar primeiro. Assim, temos duas alternativas sobre como prosseguir:

a # (b # c) ou (a # b) # c

O último axioma é simplesmente o seguinte: num blorg, não importa como se proceda à horpagem de três zuques, o resultado é sempre o mesmo.

a # (b # c) = (a # b) # c

— Isso parece meio estranho — disse eu. Estava começando a gostar da brincadeira de atiçá-lo. — Por que deveríamos preocupar-nos, afinal de contas, com a ordem da horpagem?

— Por enquanto, só posso dizer que essa é uma característica essencial dos blorgs. Daqui a pouco você verá como é útil este último axioma. Como esse sistema de axiomas foi desvinculado de toda e qualquer aplicação, não posso dizer mais nada sobre a importância dessa ideia.

— Seja como for — Brainard prosseguiu —, todos os axiomas que eu lhe forneci, ou seja, os zuques, a horpagem, o gadzuque, o antizuque e a lei da horpagem tríplice, definem o que é um blorg. Os axiomas estão completos, e agora estou pronto para explorar a teoria que pode estar aí à nossa espera. Nesse esforço, devo lembrar-lhe que começamos esta discussão com minha observação de que a matemática é difícil por ser simples demais. Tudo o que você precisa saber sobre os blorgs está explícito ou implícito nos axiomas que lhe dei. Quando se entra no espírito espartano desse mundo, evidencia-se uma certa pureza do pensamento.

— Antes de o senhor continuar, Sir John — interrompi —, poderia dar-me pelo menos um exemplo de um blorg em ação, por assim dizer?

— Que grosseria a minha não fazê-lo! — exclamou Brainard. Rabiscou uma nova tabela em seu caderno de notas e mostrou-a:

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

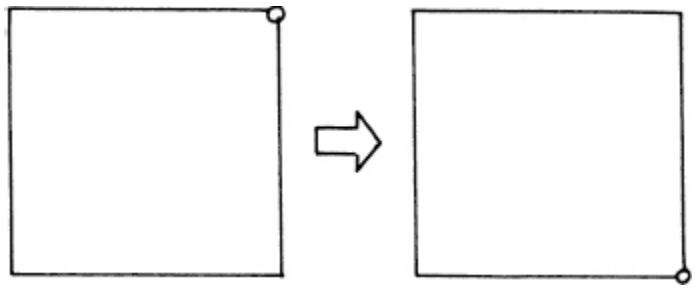
—Ora — continuou ele —, esse blorg tem um zuque a mais do que o semiblorg que lhe mostrei antes; afora isso, parece muito semelhante. Mas, se você o examinar de perto, verá que ele é mais estruturado. O gadzuque, nesse caso, é o zuque chamado *d*. Está vendo como ele apenas reflete qualquer zuque com o qual seja horpado? Além disso, cada zuque tem um antizuque. O antizuque de *b*, por exemplo, é obviamente *c*, porque

a # c = d,

onde *d* é o gadzuque. Pois bem, há duas coisas que eu gostaria de dizer sobre esse blorg em particular. Primeiro, abrirei as portas para o mundo real, mostrando-lhe onde se poderia encontrar esse blorg específico. Depois, vou-lhe mostrar uma estrutura interessante dentro desse blorg. Essa estrutura, por sua vez, preparará o terreno para a pequena teoria que pretendo desenvolver.

Brainard continuou: — Se você pegar um quadrado e girá-lo 90 graus, obterá o mesmo quadrado outra vez. Vamos concordar em chamar essa rotação de *a*. Ora, quando eu desenho o quadrado que sofreu a rotação, ele tem exatamente a aparência do original, de modo que vamos marcar um dos cantos para mostrar o que aconteceu.

Brainard desenhou dois quadrados em seu bloco:



Uma rotação é um zuque

— Ora — acrescentou ele —, uma rotação de 180 graus também deixa o quadrado inalterado, do mesmo modo que uma rotação de 270 graus. Chamaremos essas rotações de *b* e *c*, respectivamente. Esses são os zuques daquela tabela, se você quiser, e o último deles,

o *d*, é a rotação nula. Não se faz nada com o quadrado. Portanto, poderíamos chamar o nosso exemplo de blorg de rotação do quadrado.

— Está vendo como funciona a horpagem? — perguntou ele. — Basta fazer um zuque ser seguido por outro. Se eu acompanhar a rotação de 90 graus *a* com uma rotação de 180 graus *b*, chegarei ao zuque a # b = c. Além disso, cada zuque tem seu antizuque: por exemplo, a rotação *a* seguida pela rotação *c* lhe dá a rotação nula *d*, que é o gadzuque desse blorg em particular.

Não havia como duvidar de que as rotações do quadrado correspondiam a um blorg, como dizia Brainard. Mesmo assim, eu não conseguia deixar de me perguntar sobre a relação entre o exemplo abstrato, uma mera tabela, e o exemplo concreto, as rotações de um quadrado. — Isso não significa que os blorgs podem ser considerados coisas reais, pelo menos na medida em que esse blorg específico reflete certas realidades do mundo físico? — perguntei.

— Certamente. Se você pegar um quadrado real feito de papelão, por exemplo, e girá-lo de acordo com os valores mencionados, estará

automaticamente expressando esse blorg particular e atenderá aos axiomas. Mais ainda, você também ficará limitado por todas as implicações dos axiomas de um blorg, inclusive o teorema que vou agora demonstrar em relação aos blorgs. É só olhar para os zuques *b* e *d*, por exemplo. Juntos, eles constituem um blorg!

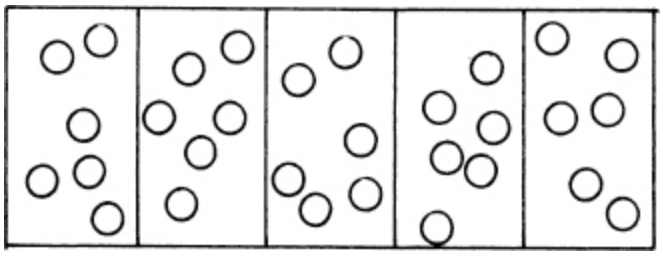
Era verdade. Eis a tabelinha que Brainard desenhou:

	b	d
b	d	b
d	b	d

— Como esse próprio subconjunto dos zuques do blorg formam um blorg, nós o chamamos de sub-blorg. Repare que esse sub-blorg tem apenas dois elementos, enquanto o blorg em si tem quatro. Como você sabe, 4 é múltiplo de 2, o que me leva ao teorema que pretendo demonstrar. Brainard escreveu o teorema em seu bloco: Teorema: se B é um blorg e C é um sub-blorg de B, então, o número de zuques de C é múltiplo do número de zuques de C.

— Para demonstrar esse teorema — prosseguiu ele —, mostraremos que, na totalidade dos casos, é possível dividir o blorg B em grupos de tamanho igual, chamados coblorgs. Todos os coblorgs terão o mesmo número de zuques de C, e também não se superporão. Decorre daí que o número de zuques de B deve ser igual ao número de zuques de C, multiplicado pelo número de coblorgs isolados. Isso, por sua vez, significa que o número de zuques de B será um múltiplo do número de zuques de C.

Brainard desenhou um pequeno diagrama para ilustrar a demonstração. Era uma figura puramente esquemática, porque os blorgs são objetos algébricos e não geométricos. O retângulo grande representava um blorg, e os retângulos menores dentro dele representavam os coblorgs.



Blorg dividido em coblorgs

— Ora — disse Brainard —, o coblorg de C é simplesmente o conjunto de todos os zuques que você obtém ao horpar um zuque específico em B com todos os zuques de C. Portanto, se você pegar um zuque particular b e horpá-lo à direita com todos os zuques c de C, obterá todo um conjunto de zuques, que vou escrever da seguinte maneira:

b # C

O coblorg b # C consiste em todos os zuques da forma b # c, um para cada zuque c de C. Quantos zuques você imagina que haja em b # C?

— Não sei — respondi. — Eu diria que o mesmo número de zuques de C. Tudo dependeria de ser possível horpar b com dois zuques c_1 e c_2 em C e acabar com o mesmo zuque. Se for assim, pode haver menos zuques em b # C do que em C.

— Bem colocado — disse Brainard com um risinho, obviamente gostando da brincadeira. — Agora é hora de um lema.

Um *lema* é apenas um pequeno teorema que prepara o caminho para um grande teorema, demonstrando um resultado do qual o teorema maior precisará. Nesse caso, Brainard teria que demonstrar a afirmação que escreveu em seguida em seu bloco:

Lema (a lei da anulação): Em qualquer blorg,
se b # c = b # d, então c = d.

— Você há de reconhecer — disse Brainard — que o que realmente perguntou foi se a lei da anulação é válida para os blorgs. No caso em questão, a sua pergunta é se b # c1 = b # c2 implica que c1 = c2. Se o nosso lema for verdadeiro, é óbvio que implica.

— Presumo que o lema seja fácil de demonstrar — murmurei, na esperança de que ele não se detivesse muito nisso.

— Bastante, bastante. Simplesmente partimos da afirmação dada de que b # c = b # d e aplicamos o axioma do antizuque, aquele que nos permite horpar qualquer zuque com seu antizuque. A propósito, ainda não temos uma notação para os antizuques, portanto, vamos denotar por b’ o antizuque de b.

b’ # (b # c) = b’# (b # d)

Ora, você deve estar lembrado de que prometi que a horpagem tríplice iria aparecer, e aqui está ela. Graças ao último axioma, no entanto, podemos reescrever da seguinte maneira os dois lados dessa equação:

(b’# b) # c = (b’# b) # d

É claro que, quando você horpa um zuque com seu antizuque, você chega ao gadzuque, de modo que podemos reescrever a equação de novo …

z # c = z # d

e, uma vez que o gadzuque deixa inalterados todos os zuques na horpagem, temos o resultado final, que prova o lema:

c = d

— É um bocado de trabalho para um resultado tão simples — arrisquei.

Brainard fitou-me com um olhar de estranheza. — Acho que não. Por favor, não se esqueça de que nunca teremos que demonstrar isso de novo. Acrescentaremos esse pequeno lema à nossa base de conhecimentos sobre os blorgs. Obviamente, é um resultadozinho muito útil, e não deveria propriamente ser um lema, e sim um mini-teorema que, apesar de seu tamanho, deve aparecer precocemente em qualquer elaboração teórica dos blorgs.

— Bem, nesse caso, retiro meu comentário — disse eu. — Se me permite recapitular, o senhor demonstrou, através desse pequeno teorema, que, quando forma o coblorg b # C, o número de zuques do coblorg é exatamente igual ao número de zuques do sub-blorg C.

— Sim — respondeu ele, com um ar satisfeito. — E agora vem o que vocês, americanos, chamam de “hora da verdade”.

— Não sou americano — disse eu.

— Desculpe-me — disse Brainard. — É a velhice, você sabe.

E continuou: — A hora da verdade vem quando se pergunta qual é a relação entre dois desses conjuntos, digamos, b_1 # C e b_2 # C. Em particular, que acontece se esses dois coblorgs tiverem um zuque em comum, digamos, d? Nesse caso, como d está em b_1 # C, ele deve ter a forma b_1 # c_1, para um zuque c_1 em C. No entanto, uma vez que d, o zuque que está nos dois

coblorgs, também está em b_2 # C, ele também deve ter a forma b_2 # c_2 para um zuque c_2 em C. Assim, podemos escrever

$$d = b_1 \# c_1 \text{ assim como } d = b_2 \# c_2$$

Pela regra da igualdade, que discutimos antes,

$$b_1 \# c_1 = b_2 \# c_2$$

Desta vez, simplesmente multiplicamos os dois lados à direita por c'1, o antizuque de c1:

$$(b_1 \# c_1) \# c'_1 = (b_2 \# c_2) \# c'_1$$

Santo Deus! Parece que o axioma da horpagem tríplice vai entrar em jogo outra vez:

$$b_1 \# (c_1 \# c'_1) = b_2 \# (c_2 \# c'_1)$$

E agora,

$$b_1 \# z = b_2 \# (c_2 \# c'_1)$$

Nesse ponto, temos b1 # z à esquerda, que é simplesmente b1, porque z é o gadzuque. À direita, no entanto, você notará que c2 # c'1 é um zuque de C, porque C é um sub-blorg e, portanto, ele mesmo é um blorg; ao horpar dois zuques quaisquer em C, você sempre chega a um zuque em C. Logo, temos agora

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 \# (c_2 \# c'_1) \\ &= b_2 \# c_3 \end{aligned}$$

Aqui, para simplificar a notação, e sem prejudicar em nada o argumento, substituí c2 # c'1 por c3. Evidentemente, b1 deve pertencer ao coblorg b2 # C, porque pode ser expresso como b2 horpado com um zuque de C, isto é, c3.

— A lógica prossegue inexoravelmente — acrescentou Brainard. — Deduz-se agora que, se você horpar b_1 com qualquer zuque c de C, obterá o zuque b_1 # c, que deve pertencer a b_2 # C, como mostram as seguintes linhas de álgebra:

$$\begin{aligned} b_1 \# c &= (b_2 \# c_3) \# c \\ &= b_2 \# (c_3 \# c) \end{aligned}$$

— O que significa esta última expressão? — indagou Brainard, e ele mesmo respondeu: — Todo zuque de b_1 # C é também um zuque de b_2 # C, porque c_3 # c é um zuque de C. Logo, o coblorg b_1 # C está contido em b_2 # C. Podemos repetir esse argumento no sentido inverso, para mostrar que o coblorg b_2 # C também está contido em b_1 # C. Isso só pode significar que os dois coblorgs são idênticos, embora sejam gerados por zuques diferentes: b_1 e b_2.

— Portanto — concluiu —, temos finalmente a prova de que dois coblorgs quaisquer são exatamente idênticos ou inteiramente disjuntos, sem nenhum elemento em comum.

Nesse momento, pude perceber o caminho para a conclusão. A argumentação de Brainard formava todos os coblorgs possíveis de C, um para cada zuque do blorg B. Quaisquer dois coblorgs que se superpusessem, mesmo num único zuque, seriam inteiramente idênticos. Caso contrário, dois coblorgs seriam inteiramente disjuntos. Assim, era possível dividir todo o blorg B em coblorgs disjuntos, todos de tamanho idêntico, sendo esse tamanho o número de zuques de C.

Brainard parecia ter terminado. — Eu me pergunto — comentou ele, pensativamente —, se você sabe o que aconteceu com esses blorgs e zuques.

— Tenho uma ligeira sensação de *déjà vu* — respondi. — É a sensação de já ter passado por isso antes.

— Bem, e passou. O tema não são realmente os blorgs, mas os grupos. Não apenas fornecemos os axiomas principais da teoria dos grupos, como também provamos um dos teoremas fundamentais dessa teoria. É o teorema de Lagrange, que vem a ser um instrumento fundamental para investigar todo tipo de grupos.

Com esse comentário, tudo me voltou à lembrança. Em meus cursos de graduação, tínhamos usado outras palavras em lugar de zuques e horpagem, mas o resultado final era exatamente o mesmo. Constituindo um dos principais conceitos da álgebra moderna, os *grupos* são uma generalização de muitos sistemas numéricos. Por exemplo, se tomarmos inteiros comuns como zuques e a adição comum como a horpagem, o resultado é um grupo. Nesse caso, o gadzuque é 0, porque zero mais um inteiro resulta novamente nesse inteiro. O antizuque de um inteiro é simplesmente seu oposto. Por exemplo, o antizuque do zuque 5 é -5, porque 5 + -5 = 0.

Além disso, se considerarmos todos os números racionais — isto é, as razões dos inteiros, como 3/7 — e considerarmos a multiplicação como a operação de horpagem, também chegaremos a um grupo. Nesse caso, o gadzuque será 1, e o inverso de um número racional como 3/7 será 7/3, porque 3/7 x 7/3 = 1.

Os grupos continuam indefinidamente. Se considerarmos como zuques todas as permutações de uma sequência como *abcde*, horparemos duas permutações, empregando primeiro uma e depois a outra. Por exemplo, se uma permutação trocar as duas primeiras letras e outra deslocar todas as letras uma posição para a direita (trazendo a última para a frente), a primeira permutação transformará a sequência em *bacde*, e a segunda permutação transformará *bacde* em *ebacd*. O gadzuque será a permutação nula, na qual não se faz nada. Mais uma vez, para toda permutação existe uma antipermutação — — ou seja, fazer exatamente o inverso.

— Eu tenho a sensação — afirmei — de que o senhor não transformou a teoria dos grupos na teoria dos blorgs à toa.

— Meu objetivo era demonstrar a extrema simplicidade da matemática — disse Brainard. — Em particular, lembre-se do comecinho da nossa sequência de pensamentos. Forneci cinco axiomas da teoria dos grupos. Em que outra disciplina se pode expor toda a fundamentação, com extrema precisão, em cerca de 10 minutos de conversa? A resposta é: em nenhuma.

Brainard talvez houvesse subestimado o tempo que tinha levado para expor os axiomas da teoria dos grupos, mas entendi a mensagem.

— A confusão que você sentiu — continuou ele — deveu-se à sua busca de que fossem enunciados outros significados fora do sistema axiomático. Não existe nenhum outro significado. O que é um zuque, afinal? É a coisa de que se compõem os blorgs. Ele tem certas propriedades, de acordo com os axiomas, mas não tem outras. Todo blorg contém um gadzuque, e todo

zuque de um blorg tem um antizuque. Além disso, há um axioma muito simples que nos diz que é lícito horpar três zuques de uma vez. Isso é tudo o que existe num blorg… perdão, num grupo.

— Ora — disse ele ainda —, é claro que eu admito que, depois de haver exposto os axiomas, as coisas se complicaram um pouco mais, mas espero que tenham continuado extremamente claras. Na verdade, mais uns dez minutos de conversa foram suficientes para demonstrar um teorema importante da teoria dos grupos. Nós nos movemos de maneira sistemática, construindo novos teoremas a partir dos antigos. Por exemplo, demonstramos a lei da anulação em nosso trajeto para o teorema de Lagrange. Cada passo foi pautado nos anteriores, seguindo-os como uma conclusão necessária e sem nenhum tipo de adivinhação. E assim procede a matemática.

— As bases matemáticas são tão simples — prosseguiu Brainard — que chegam a ser dolorosas ou maçantes para a pessoa comum. O que a maioria das pessoas não percebe na matemática é que nenhuma elaboração real é possível sem essa simplicidade. Trata-se da simplicidade de uma escala musical, se você quiser, gradativamente transformada em sinfonias de pensamento.

— A-ha! — disse eu. — Então a matemática é criada.

— Foi apenas uma analogia — disse Brainard. — Não importa de onde você ache que vem a sinfonia, ela tem as qualidades de harmonia e melodia. A harmonia concerne à maneira como todas as ideias matemáticas se interligam, sem nunca se contradizer e sempre cooperando umas com as outras. A melodia descreve o fluxo das ideias num desenvolvimento particular, como a demonstração de um teorema.

— Não faz muito tempo — prosseguiu ele —, houve um matemático notável aqui nesta universidade. Chamava-se G.H. Hardy. Hardy acreditava muito na matemática como uma arte semelhante à música ou à escultura. Era a forma mais pura de pensamento, tão pura que Hardy não queria saber de nenhuma matemática que fosse aplicável a coisa alguma no mundo real. A matemática era não apenas a rainha das ciências, mas também das artes, e ele não admitia colocá-la como criada de ninguém. Ao mesmo tempo, estranhamente, Hardy achava que a matemática tinha uma existência independente, que estava aí, por assim dizer.

— Aí onde? — perguntei.

— Não tenho a menor ideia — respondeu Brainard.

Examinei sua expressão atentamente, mas ele ficou olhando para o lado oeste do céu com uma expressão singularmente ingênua no rosto. Depois, virou-se para mim com um sorriso malicioso.

— Eu diria que aí… aqui — respondeu, dando um tapinha na cabeça. — Mas, antes de passarmos a isso, sejamos perfeitamente explícitos a respeito do que nos diz o exemplo do blorg. Em primeiro lugar, a matemática, pelo menos em seus alicerces, é o assunto mais simples que o homem conhece. Todos a acham difícil justamente por essa razão, penso eu. As pessoas sempre ficam chocadas ao descobrir esse fato por si mesmas. “Ora essa”, dizem elas, “eu não fazia ideia!”

— A outra coisa que o nosso exemplo ilustra — prosseguiu — é a generalidade da matemática. Como você sabe, existem inúmeros objetos matemáticos diferentes que têm a estrutura de um grupo, para não falar em vários sistemas físicos do mundo real. Cada teorema da teoria dos grupos aplica-se a cada um desses objetos, sem exceção. Em que outro campo se pode fazer pronunciamentos que afetem um número incontável de estruturas, tanto conhecidas quanto desconhecidas?

— Por fim — concluiu ele —, eu queria que você visse o método axiomático em funcionamento. Lembre-se da frequência com que escrevi uma pequena fileira de símbolos. Nisso, estamos costeando o limiar do maior avanço da matemática do século XX, em minha humilde opinião.

Ao ouvir isso, quase tive a sensação de estar presente numa ocasião histórica. — E qual é esse avanço? — perguntei.

— Ora, meu rapaz! Que avanço poderia ser, senão a mecanização da matemática? Sabe, nós descobrimos, sem necessariamente tirar plena vantagem dessa descoberta, que nossos próprios processos de pensamento, pelo menos tal como se expressam nas demonstrações, podem ser reproduzidos nas máquinas que chamamos de computadores. Mas agora proponho examinarmos melhor esse tema amanhã, quer dizer, se eu viver até lá. Ai, ai, ai! Está ficando tarde.

O sol estava desaparecendo no céu e dei uma olhadela disfarçada em meu relógio, enquanto Brainard olhava para as nuvens distantes através das árvores. Eram quase nove horas! Eu havia esquecido que a alta latitude da Inglaterra prolonga os dias de verão.

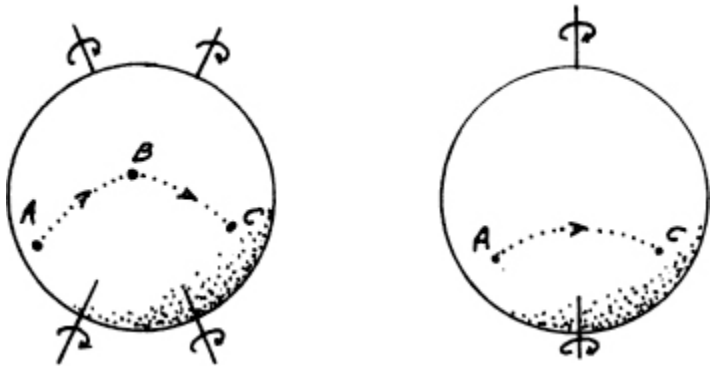
— Por que você não interrompeu toda essa minha tagarelice? — perguntou ele. — Com a sua permissão, nós vamos a meu restaurante favorito, logo aqui perto, o Trout.

Seguimos a pé até a saída da faculdade e finalmente chegamos à High Street, a caminho de um ponto de táxis perto do centro. No trajeto, Brainard explicou que seu médico lhe havia ordenado comer o mínimo possível de carne vermelha. — Em consequência disso — disse ele —, estou usando a sua visita como um pretexto para me proporcionar o deleite mensal de uma torta de carne e rim, que eles fazem esplendidamente no Trout.

Aparentemente, Brainard não tinha carro, já que morava muito perto do Merton College. No trajeto, ele me explicou seu grupo favorito do mundo real, o grupo das rotações ortogonais. Os zuques eram todas as rotações possíveis de uma esfera em torno deste ou daquele eixo, passando pelo centro.

— Você pode visualizar esse grupo — disse ele — pegando uma bola grande, escolhendo um eixo de rotação e girando a bola no ângulo específico. Faça isso duas vezes, e você terá horpado dois zuques, produzindo um terceiro — acrescentou. Achei isso meio surpreendente.

— O senhor quer dizer que duas dessas rotações, quaisquer que sejam os eixos ou os ângulos, são sempre equivalentes a uma terceira?



Horpando duas rotações

— Justamente — retrucou Brainard, com um toque de presunção. — Você pode fazer mil rotações dessas em sequência, não faz diferença. O resultado final poderá ser reproduzido por uma única rotação. Pense nisso. Não é exatamente óbvio, mas vem-nos diretamente da teoria.

— O que diria o senhor — perguntei-lhe — se alguém girasse uma esfera um certo número de vezes, dessa maneira, e acabasse com uma

orientação da esfera que não pudesse ser conseguida por uma única rotação?

— Essa descoberta teria que se traduzir na teoria dos grupos e constituiria um contraexemplo de um teorema fundamental. Ela seria impossível, da maneira como vejo as coisas. A impossibilidade na mente implica a impossibilidade no mundo real, num caso desses.

— Então, o senhor admite — perguntei — que o mundo da matemática, tal como o chama, não deixa de ter uma certa influência no chamado mundo real?

— Meu caro amigo, vamos ser claros a esse respeito. Não sei o que você quer dizer com influência, mas considero lícito dizer que algumas impossibilidades lógicas também equivalem a impossibilidades físicas. Vamos apenas concordar em que a mente humana tem uma certa capacidade de moldar a realidade, uma capacidade aprimorada por milhões de anos de evolução. Não teríamos sobrevivido sem um modelo que fosse essencialmente correto. Nesse modelo, deparamos com lagos tranquilos de superfícies perfeitamente planas, que refletem nossa imagem, vemos bolhas esféricas, linhas retas em alguns horizontes e pontos por toda parte, especialmente à noite. E os números, além disso, são abundantes em coleções de coisas similares e nas distâncias e tamanhos. Todas essas coisas serviram, sem dúvida, para sugerir o objeto da matemática.

— A questão — continuou ele — é que a matemática consistiu, a princípio, em abstrações justamente desses objetos e fenômenos. Era natural que fosse assim, porque havia muito pouco que abstrair. Esses objetos, tal como representados na mente, já eram bastante abstratos. Portanto, não deve surpreender-nos que as abstrações gerem outras abstrações, e que algumas destas últimas tenham o hábito de aparecer no mundo real. Este táxi, de um minuto para o outro, expressa um zuque após outro no grupo ortogonal de rotações em torno de uma estrutura inercial.

Embora eu não tivesse muita certeza do que ele queria dizer, o táxi, sem abandonar sua estrutura inercial, levou-nos para fora da estrada Oxford Ring e entrou numa estradinha campestre que levava ao município de Godstowe. Havia telhados cobertos de colmo, muros de pedra e pessoas de aparência cordial, com os rostos corados pelo pôr do sol. Havia pavões passeando nos jardins do Trout. Do lado de dentro, a noite já estava movimentada. Tivemos sorte de encontrar uma mesa vaga perto da lareira.

Enquanto aguardávamos o serviço, Brainard estendeu-se em suas ideias anteriores sobre a matemática e os computadores. — Se o cérebro é ou não é um tipo de computador sofisticado, não faço ideia. Mas há provas de que em nossas pesquisas procedemos num nível consciente e num nível inconsciente.

Ele se reclinou na cadeira para desfrutar do calor da lareira e apanhou seu enorme cachimbo, que acendeu com entusiasmo. — Restam-me muito poucos prazeres — explicou. Uma nuvem de fumaça aromática espalhou-se suavemente pela névoa que nos cercava.

— Considere o caso de Henri Poincaré, o famoso matemático francês da virada do último século — disse. — Ele vinha trabalhando num problema das chamadas funções de Fuchs, um problema ardiloso, profundo e difícil, com o qual estava tendo pouco sucesso. Poincaré percebeu que estava trabalhando demais e precisava muito de umas férias. Assim, sentiu-se grato quando surgiu a oportunidade de uma excursão. Saiu de Caen, onde morava, para Coutances, a fim de se encontrar com alguns amigos. Lá, pegou um ônibus para a excursão. Quando estava colocando o pé no primeiro degrau do ônibus, aconteceu uma coisa estranha. Ele estivera discutindo um assunto com um colega, alguma coisa que não tinha nenhuma relação com o problema das funções fuchsianas. Mas, ao pôr o pé nesse primeiro degrau, a solução lhe ocorreu em toda a sua plenitude. Certificando-se de que conseguiria lembrar-se dos elementos principais da solução, ele abandonou o assunto na mesma hora e, mais tarde, quando voltou para casa, redigiu os detalhes.

— É uma história simples — acrescentou Brainard —, mas que tem implicações importantes. Poincaré via o trabalho matemático como uma criação. Com isso ele queria dizer que a mente matemática, ao resolver um problema, trabalhava examinando combinações de ideias. A princípio, a investigação era consciente, mas, à medida que o cérebro se acostumava com os tipos de operações mentais implicadas, aos poucos ele podia ir tomando as rédeas da investigação, ou, pelo menos, de partes dela. O que estou dizendo é que a mente podia fazer isso sem que Poincaré tivesse conhecimento direto de uma participação consciente.

— Poincaré assemelhou suas operações mentais — prosseguiu ele — a pequenos átomos agarrados por ganchos às paredes da mente. O trabalho matemático intenso tinha o efeito de agitar esses átomos ideativos, pondo-os em movimento dentro do cérebro. Desse modo, podiam ocorrer novas

combinações de átomos, e as que eram fecundas davam origem a novas ideias, que levavam a uma solução. Essa, no entanto, é uma analogia mecânica, que vai um pouco de encontro à ideia que Poincaré fazia da matemática como sendo criada.

— Nesse caso, por que Poincaré afirmou que a matemática é criada? — perguntei.

— Se você quiser a opinião de um inglês antiquado, eu diria que foi uma coisa cultural. Talvez a descoberta não fosse suficiente para Poincaré. Sendo francês, ele tinha que ser um criador, uma espécie de artista.

— E para responder a sua pergunta não formulada — acrescentou Brainard —, terei que dizer que meu próprio trabalho matemático sempre foi conduzido sob a impressão de que eu estava descobrindo coisas. Coisas que eu queria desesperadamente que fossem verdadeiras revelaram não sê-lo, e coisas que eu mal conseguia imaginar que fossem verdadeiras revelaram sê-lo. Mas não me pergunte se a matemática tem uma existência independente da mente. Só sei lhe dizer que ela existe independentemente *na* mente. Quanto à capacidade que ela tem de descrever o mundo físico, isso é um mistério completo para mim.

Nesse exato momento, chegaram nossas tortas de carne e rim. Brainard apagou imediatamente o cachimbo e atirou-se ao trabalho com o vigor de um rapaz de 20 anos. Conversamos pouco enquanto comíamos. Tínhamo-nos submetido à abstinência por muito tempo.

Ao terminarmos, ele prometeu que, embora tivesse que comparecer a algumas reuniões da faculdade na manhã seguinte, tornaríamos a encontrar-nos à tarde, quando ele me explicaria suas ideias sobre a lógica matemática, as demonstrações mecânicas, os computadores e o que ele chamou de “máquinas de pensar”.

CAPÍTULO 8

MÁQUINAS MENTAIS

— Estive pensando… — começou Brainard, mas parou para encher seu cachimbo. Caminhávamos do Hotel Churchill para o Instituto de Matemática, na extremidade norte de Oxford. — Estive pensando no que ontem chamei de “máquinas de pensar”. Percebo com clareza que, embora isso não seja exatamente o que você tinha em mente com essa história do *holos*, talvez seja possível chegar a uma harmonização dessas duas visões da realidade matemática. Mas isso talvez fique para depois.

O cachimbo apagou-se e Brainard usou outro fósforo.

— Existem alguns detalhes de coisas inacabadas de ontem, coisas que eu gostaria de retificar. Quando falei da influência da matemática no mundo, presumi que você estava-se referindo às influências diretas, ou ao que chamou de “poder absurdo da razão pura”. Existem influências diretas, é claro. Por exemplo, existe um grupo chamado SU(3) que descreve as configurações de quarks admissíveis nos nêutrons e prótons. Mas há também as influências indiretas, e estas, curiosamente, são tão importantes quanto as diretas.

O cachimbo finalmente começou a soltar baforadas de fumaça, e Brainard prosseguiu pela High Street como uma antiga locomotiva a vapor, e eu como um vagão atrás dela.

— A influência indireta da matemática no mundo age por uma rota tortuosa — disse ele. — Contrariando os desejos do meu estimado mas falecido colega G.H. Hardy, todo pedacinho de matemática que descobrimos transforma-se num instrumento em potencial para a descrição e a compreensão do mundo físico, do cosmo material de que supostamente depende a nossa vida. Nesse papel, a matemática sempre foi, é e sempre será a fonte primordial de modelos abstratos precisos para a ciência. É dessa

maneira que a matemática influencia a ciência. Ora, a ciência, como você sabe, é a fonte primordial de informações e ideias para o desenvolvimento de novas tecnologias. Muitas, muitas descobertas científicas, desde a eletricidade até a fissão atômica, resultaram em novos aparelhos, que vão de telefones a reatores nucleares. Ora, os seres humanos usam todas essas invenções maravilhosas e, em sua miríade de atividades tecnológicas, os seres humanos afetam profundamente o mundo. Portanto, aí está: da matemática à ciência, à tecnologia e às pessoas, não se pode duvidar de que a matemática tem mais influência nas questões humanas do que qualquer outro campo do esforço humano.

O cachimbo tornou a apagar, de modo que paramos. Brainard havia concluído seu apanhado sobre a influência da matemática no mundo. Eu queria perguntar-lhe sobre a significação do fato de todas essas máquinas funcionarem, para tornar a ligá-lo ao mundo real de maneira mais direta, mas ele estava visivelmente impaciente. O cachimbo voltou a ser acendido e seguimos em frente.

— O segundo item — disse ele — concerne ao sentido. Há quem pergunte: “Qual é o sentido da matemática?” Minha resposta é que, em si mesma, a matemática não tem sentido nenhum, na acepção corriqueira da palavra. Pode-se dizer que toda a matemática diz respeito a horpar zuques. Mas, se considerarmos que o sentido de uma palavra sempre depende de um referente, o sentido da matemática dependeria de seus referentes, das coisas a que ela se aplica.

— Parte do significado de um blorg… desculpe-me, de um grupo — continuou Brainard — são as situações do mundo real a que ele se aplica. Aquele pequeno exemplo das rotações do quadrado, que descrevi ontem, poderia ser tomado como o significado do grupo cuja tabela eu lhe mostrei. Portanto, se admitirmos que o sentido da matemática é claramente distinto de suas operações internas, passaremos a entrar num vazio de sinais sem sentido no papel. Estas considerações levarão, inexoravelmente, às máquinas de pensar.

Brainard estava a pleno vapor. Dava passadas rápidas e enérgicas, enquanto suas ideias fluíam com uma precisão e uma força que faziam lembrar seus dias de glória.

— Tendo posto tudo isso para fora — disse-me —, quero mostrar como a matemática, que em si é um assunto sem sentido, tornou-se, ela mesma, objeto de uma investigação das mais surpreendentes. Essa investigação

levou a uma visão da matemática como uma acumulação de sinais sem sentido no papel. A manipulação desses sinais logo foi reconhecida como um processo mecânico. Minha história tem a ver com a maneira como a matemática tornou-se, cada vez mais, um campo de máquinas capazes de pensar, de certa maneira. A história começa por um campo chamado metamatemática. Você já ouviu falar da metamatemática, é claro.

Eu já ouvira, mas me abstive sensatamente de dizer que nunca havia encontrado uma matemática de que não gostasse.[a] — É claro — respondi —, mas confesso que, exceto por um curso de um semestre sobre computação durante a faculdade, eu…

Diante disso, Brainard lançou-se no assunto: — Poderíamos definir a *metamatemática* como a matemática da matemática. Estranhamente, embora a metamatemática diga respeito à matemática, ela também faz parte da matemática. Seja como for, apesar de todos os outros avanços matemáticos deste século, ainda me sinto inclinado a entregar a palma à metamatemática e a sua influência posterior. É uma palavra e tanto, não é? Há quem a chame simplesmente de lógica matemática, que é um termo mais descritivo, embora um pouco mais extenso.

O cachimbo de Brainard finalmente pegou para valer, e continuamos nossa caminhada.

Ele prosseguiu: — No fim do século XIX, enquanto a maioria dos matemáticos seguia em frente mais ou menos como sempre tinha feito, alguns deles, como David Hilbert, da Alemanha, passaram a se interessar pela possibilidade de que surgissem contradições dentro da própria matemática. As sinetas de alarme vinham tocando desde a Antiguidade. Você conhece o paradoxo de Zenão, eu presumo.

Admiti ter ouvido falar dele: Aquiles e uma tartaruga começam uma corrida em que se permite que a tartaruga saia na frente, com uma certa vantagem. Zenão afirmou que Aquiles nunca a alcançaria, porque teria que passar por cada lugar por onde a tartaruga passasse antes de conseguir alcançá-la. O problema era que Aquiles teria que passar por um número infindável desses lugares. Por exemplo, primeiro ele passaria por um lugar que estava a meio caminho da tartaruga, depois, por outro que ficava a dois terços do caminho, em seguida, por um lugar situado a três quartos do caminho, e assim por diante, indefinidamente.

— O problema do paradoxo de Zenão — disse Brainard — é que a infinidade pode conter um subconjunto que é do tamanho da própria

infinidade. Aquiles tinha que passar por um número infinito de lugares antes de alcançar a tartaruga. Mas esses lugares correspondiam a um mero subconjunto dos lugares por onde a tartaruga já havia passado. A aparente contradição tornava-se ainda mais evidente quando os inteiros pares eram colocados em correspondência um a um com os inteiros como um todo.

Brainard parou para pegar seu bloco, escrevendo a seguinte sequência, que mal consegui enxergar, porque a página saiu voando numa brisa súbita:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 …
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22 …

— Como pôde o conceito de infinidade — perguntou ele — vir a ser tão bem definido e respeitável quanto o de um número comum, quando pairavam sobre ele fenômenos tão anômalos?

O rumo geral das observações de Brainard estava-me deixando meio apreensivo. Perguntei-me se essas contradições e fenômenos anômalos estariam prestes a criar encrencas. Por isso, recebi com certo alívio seus comentários seguintes.

— Foi Georg Cantor, um matemático russo-germânico, quem resolveu esses aparentes paradoxos que cercavam a ideia do infinito. Foi um trabalho brilhante. Ele definiu a infinitude através de coleções infinitas. Essas coleções caracterizavam-se pelo fato de que se podia subtrair delas um número finito de elementos, sem alterar o tamanho da coleção. Podia-se até subtrair um número infinito, como no exemplo dos inteiros.

— No entanto — continuou Brainard —, alguns matemáticos, como Hilbert, estavam sempre atentos à questão das possíveis contradições que surgissem em seu campo. Hilbert resolveu que a melhor maneira de garantir que as joias principais da matemática, como a teoria dos conjuntos, a aritmética e o cálculo infinitesimal, ficassem imunes a essas dificuldades era reformular esses campos na linguagem da lógica. A matemática estava prestes a se transformar, para valer, em meros “sinais no papel”.

— Hilbert propôs — disse ainda Brainard — que se provasse que as teorias padronizadas estavam livres de contradição de uma vez por todas, através do expediente simples de gerá-las novamente, de um modo que independe de conteúdo. Ele mostrou como expressar as teorias matemáticas em termos de sequências de símbolos, chamadas *fórmulas*. Os próprios

axiomas em que uma teoria se baseava podiam ser enunciados como fórmulas, o mesmo se aplicando a todos os teoremas que compunham a teoria. Pois bem, para gerar essa teoria de um modo isento do conteúdo, você notará que Hilbert não prestou nenhuma atenção ao significado real dos termos, das variáveis e de outros objetos da teoria, em suas novas encarnações de meros sinais no papel.

— Como você vê — comentou ele —, era a isso que eu queria chegar ontem, com aquela história de horpar os zuques. Santo Deus! Dava para achar que eu havia enlouquecido! Hilbert mostrou como traduzir toda a matemática em fórmulas que pudessem ser geradas por fórmulas através de simples regras de lógica. A matemática foi efetivamente reduzida a uma manipulação mecânica de sinais sem sentido no papel.

— Estranho — interrompi —, é assim que a maioria das pessoas pensa na matemática, de qualquer maneira.

— Justamente! — respondeu Brainard, dando uma boa gargalhada. — É claro que, quando dizemos sem sentido, estamos apenas fazendo referência ao tipo de significados externos que mencionei no começo. Você sabe, os exemplos, aplicações e sabe-se lá o que mais. Mas a matemática também tem um sentido interno, que é, em essência, sua estrutura lógica.

A história das contradições ainda estava-me deixando meio nervoso. — Diga-me — pedi — de que modo o projeto hilbertiano de mecanização da matemática poderia livrá-la das contradições.

— Hilbert esperava que, havendo enunciado uma teoria matemática em sua formulação metamatemática especial, ele exporia às claras a estrutura da própria teoria, livre de referenciais, de associações, de ideias ocultas, de todas as coisas que pudessem subverter o processo de demonstração. Ele tinha em mente o que chamava de uma *Beweistheorie*, uma teoria da demonstração que pudesse ser aplicada aos aspectos estruturais de uma dada matemática. O projeto seria imenso, ultrapassando em muito a capacidade de uma pessoa sozinha.

— Pois bem — prosseguiu Brainard —, passadas algumas décadas, os filósofos e matemáticos britânicos Alfred North Whitehead e Bertrand Russell publicaram seus *Principia Mathematica*, que foram uma tentativa de transformar toda a matemática em axiomas, de assentar numa base rigorosamente sólida todo o edifício da matemática moderna, ou, pelo menos, seus fundamentos. Não haveria lacunas lógicas, todas as demonstrações seriam completas e todos os novos teoremas seriam

solidamente construídos sobre os precedentes. É claro que essa não era exatamente a *Beweistheorie* que Hilbert tinha em mente, mas, na verdade, foi uma proeza espantosa.

A possibilidade de contradições internas que Brainard acabara de levantar era mesmo um assunto sério, especialmente para uma pessoa como eu, um quase crente no holos. Se houvesse contradições, refleti, toda a ideia do holos desmoronaria ao meu redor, como um conceito vazio de cujo centro eu ouviria os estertores de agonia de Pitágoras, os gritos da Irmandade da Pureza, de Kepler, de Balmer e dos outros, com as almas angustiadas.

— Presumo que Russell e Whitehead não tenham provado a coerência da matemática — arrisquei-me a conjecturar.

— Na medida em que o esforço deles não equivaleu à *Beweistheorie* pretendida por Hilbert, a resposta é não. E Russell e Whitehead sabiam disso. Mas seu sonho máximo de uma prova definitiva da coerência foi absolutamente destroçado por um artigo sumamente perturbador, publicado apenas um ano depois do lançamento dos *Principia*. O artigo foi escrito por um jovem lógico e matemático alemão, chamado Kurt Gödel. Nele, Gödel demonstrou seu famoso teorema da incompletude. O teorema mostrava que qualquer sistema matemático que contivesse a aritmética padrão dos inteiros seria incoerente, isto é, conteria contradições, ou seria incompleto. Esta última palavra [*incompleto*] significa que existem *teoremas*, afirmações verdadeiras dentro do sistema, que, mesmo assim, simplesmente não podem ser provados no sistema. O preço da coerência, de acordo com Gödel, é a incompletude. Esquisito, não é? Até hoje isso ainda me parece estranho.

— Alguns filósofos — prosseguiu Brainard — deram muita importância ao teorema de Gödel, uma importância excessiva, a meu ver, declarando a superioridade da razão humana em relação ao mero raciocínio mecânico. Foi um ser humano, afinal, que apontou a impossibilidade de demonstrar certos teoremas pelo tipo de raciocínio mecânico que Hilbert havia proposto. Mas eles se esquecem de que o próprio processo metamatemático poderia ser mecanizado, do mesmo modo que o projeto de Hilbert. Na verdade, estamos diante de uma regressão interminável dos sistemas. Um sistema atrás do outro.

Brainard deu um suspiro, como se carregasse na mente o peso de todos esses sistemas. Tentei aliviar seu fardo: — Demonstrou-se a coerência de

algum sistema matemático? — perguntei. Diante dessa indagação, ele parou na calçada para fitar uma torre distante. Depois, pegou seu bloco, rabiscando enquanto falava.

— Eu lhe asseguro que sim. Afinal, existe o cálculo proposicional. Uma observação quase corriqueira facilita essa questão. Como você sabe, o cálculo proposicional é a forma mais simples de lógica. Ele consiste em *proposições*, afirmações que podem ser verdadeiras ou falsas. Simbolizamos essas proposições com nomes de letras, como p, q, r etc., que são as chamadas proposições atômicas. No cálculo proposicional, podemos fazer proposições ligeiramente mais complicadas a partir das proposições atômicas, combinando-as de várias maneiras. Assim, “p e q” escreve-se $p \wedge q$, “p ou q” escreve-se p q e “p implica q” escreve-se $p \rightarrow q$. Ah, e não me deixe esquecer a negação, o não p, que se escreve ~p.

— Os significados das expressões simples que acabei de mencionar — continuou Brainard — são determinados apenas em relação à verdade. Nesse sentido, seus significados exatos são exatamente o que parecem. Por exemplo, $p \wedge q$ é verdade se p e q forem ambos verdadeiros, ao passo que $p \vee q$ é verdade se p ou q ou ambos forem verdadeiros. A expressão $p \rightarrow q$ significa que, se p for verdadeiro, q também deverá ser verdadeiro. Por último, temos ~p, a negação de p. Se p for verdadeiro, ~p será falso, e vice-versa.

— Existem regras simples — esclareceu ele — para construir expressões no cálculo proposicional. Em síntese, você pode pegar duas proposições quaisquer, por mais simples ou complexas que sejam, e uni-las pelo símbolo do e, $\wedge$. Pode fazer a mesma coisa com o símbolo do ou, $\vee$, ou com o símbolo da implicação, $\rightarrow$, e pode negar uma proposição, por mais simples ou complicada que seja, simplesmente colocando o sinal de negação, ~, à frente dela. Aqui está uma expressão mais ou menos típica do cálculo proposicional, por exemplo:

$$(p \wedge q) \vee (\sim(p \wedge q) \rightarrow q)$$

— Ora — prosseguiu Brainard —, essa expressão, em particular, pode ser verdadeira ou falsa, dependendo dos valores de verdade das expressões que participam dela. Esses são os teoremas da nossa matéria. Os axiomas de que deriva o cálculo predicativo têm uma forma particularmente simples.

Aqui estão, por exemplo, os axiomas usados por Russell e Whitehead nos *Principia*:

1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (p \vee q)$
3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$

— Pois bem — seguiu dizendo Brainard —, você pode partir desses axiomas e usar duas regras, ditas de substituição e de desvinculação, que descreverei daqui a pouco. Partindo dos axiomas, e guiado ou não pela intuição, você chegará a uma sequência de proposições que são universalmente verdadeiras no sentido que acabo de definir. Por exemplo, aqui está um teorema que eu poderia demonstrar dessa maneira:

$$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$

Independentemente de p ser verdadeiro ou falso, ou de q ser verdadeiro ou falso, essa afirmação é sempre avaliada como “verdadeira”. Esse teorema em particular, embora seja bastante típico dos teoremas mais curtos, tem grande importância para o sistema como um todo.

— Veja — comentou Brainard —, se o cálculo proposicional for coerente, nunca será possível obter um teorema T juntamente com sua negação, ~T. Suponha que encontrássemos uma proposição T desastrosa assim. Não chegaríamos a parte alguma, até que surgisse uma ideia fecunda, como a maçã caindo em cima de Newton. Que aconteceria se você substituísse o p do pequeno teorema anterior pelo assustador teorema/antiteorema T? É a regra da substituição que nos permite fazer isso:

$$T \rightarrow (\sim T \rightarrow q)$$

Coloquei a proposição T no lugar do símbolo p no teorema anterior. A outra regra, a regra da desvinculação, permite separarmos qualquer expressão que esteja implícita numa expressão que já saibamos ser verdadeira. Como T é supostamente verdadeiro, podemos desvincular $\sim T \rightarrow q$ da fórmula, descobrindo que $\sim T \rightarrow q$ é universalmente verdadeiro, como todas as outras

fórmulas geradas pelo sistema. Mas, espere aí! O que é isso? Como T é autocontraditório, não apenas T é verdadeiro, mas também ~T. Isso nos permite aplicar mais uma vez a regra da desvinculação, separando o q como verdade universal da fórmula ~T → q. No fim, chegamos ao teorema mais simples possível, q.

— Mas, espere aí outra vez! — exclamou Brainard. — Dado que, por essa linha de raciocínio, o próprio q é universalmente verdadeiro, ele pode ser substituído por qualquer fórmula proposicional, de acordo com a regra da substituição. Que esquisitice! Tudo é verdadeiro! Se o cálculo proposicional contiver uma contradição, todas as proposições, por mais complicadas que sejam, também serão verdadeiras, todas as proposições.

Brainard enfatizou a palavra *todas*, fitando-me mais uma vez com aquele olhar peculiarmente intenso.

— E agora vem de novo a hora da verdade — prosseguiu ele: — Será que todas as proposições do cálculo afirmado também são teoremas? De modo algum! Por exemplo, a proposição p q não é um teorema. Quando p e q são ambos falsos, por exemplo, também essa proposição o é. Assim, saindo do cálculo proposicional para o nível metamatemático, por assim dizer, descobrimos uma contradição na suposição de que o cálculo proposicional é incoerente ou é isento de contradições. Aliás, podemos ainda demonstrar que o cálculo proposicional também é completo. Qualquer teorema do cálculo proposicional pode ser obtido dos axiomas.

Brainard continuou: — Como se pode demonstrar, os sistemas matemáticos mais poderosos não estão nesse caso simples. Como mostrou Gödel, qualquer sistema matemático que contenha a aritmética, se for coerente, terá que ser incompleto. Todos esses sistemas matemáticos, e isso inclui a maioria das matemáticas realmente interessantes, são marcados por placas ocasionais de sinalização que dizem: “VOCÊ NÃO PODE CHEGAR LÁ PARTINDO DAQUI”.

Perguntei a Brainard se ele conhecia algum teorema que não fosse demonstrável em nenhum de nossos sistemas matemáticos padronizados.

— Com certeza você quer dizer *teoremas suspeitos*. Houve época em que alguns se perguntaram se a famosa conjectura das quatro cores estaria nessa situação. Você sabe, aquela ideia de que não se precisa de mais de quatro cores para distinguir os países de qualquer mapa, por mais abstrato ou irreal que seja. Antes que essa conjectura fosse finalmente provada na década de 1970, e, mesmo assim, só com a ajuda de um computador, alguns

achavam que ela poderia ser um dos teoremas estranhos insinuados pelo teorema de Gödel. No momento, um dos poucos candidatos é a *conjectura de Goldbach*, que afirma que qualquer número par é a soma de dois primos. Vamos ver, tente você mesmo. Que dizer do 28?

— Hmmm, 1 mais 27, não, 2 mais 26, não, 3 mais 25, não, 4 mais 24, não, 5 mais 23, sim. Sim! — exclamei.

— Parece que, não importa com que número par você comece — continuou Brainard —, sempre conseguirá encontrar dois números primos cuja soma seja esse número par. É uma coisa tão simples que se poderia explicá-la ao proverbial homem comum, mas até hoje ninguém conseguiu demonstrá-la!

Brainard parou para olhar distraidamente para a vitrine de uma loja de computadores. — Agora já falamos da metamatemática e do problema de provar que a matemática é coerente, mas eu não disse nada sobre uma direção importantíssima a que essas ideias levaram. Os computadores dessa vitrine me fazem lembrar um metodozinho curioso, chamado de Algoritmo do Museu Britânico. Talvez ele seja algo que você está procurando, já que ilustra a ideia da independência da matemática em relação às influências culturais, no que concerne às verdades ou teoremas centrais desses sistemas. A questão, a questão principal da visão da matemática como sinais no papel, tal como incentivada pelos metamatemáticos, é que não há nem mesmo necessidade de seres humanos para descobrir novos teoremas. Existem máquinas que são perfeitamente capazes, pelo menos em princípio, de descobrir novos teoremas.

— Um computador — acrescentou ele —, programado com o Algoritmo do Museu Britânico [AMB], poderia começar pelos axiomas de Russell-Whitehead, por exemplo, e gerar sistematicamente todos os teoremas possíveis, aplicando aos axiomas as regras da substituição e da desvinculação, para obter a primeira camada de teoremas. O fato de a maioria desses teoremas ser trivial não tem importância. Eles servem de alimento para o nível de processamento seguinte, no qual o computador programado com o AMB usa as mesmas regras para gerar uma nova camada de teoremas. Em pouco tempo, o computador estará gerando alguns teoremas genuinamente interessantes. Terá que fazê-lo, porque, mais cedo ou mais tarde, ele chegará a todos os teoremas.

— Pelo que dizem os meus colegas da ciência da computação — continuou Brainard —, entendo que essa máquina poderia ser construída,

pelo menos em princípio. Na verdade, acho que alguns dos primeiros pesquisadores da inteligência artificial na América chegaram de fato a construir uma versão desse programa, que incluía uma regra para descartar mecanicamente alguns dos teoremas menos interessantes.

Ocorre que eu tinha um certo conhecimento da pesquisa mencionada por Brainard, e ele parecia ter levado a ideia um pouco longe demais. — Mas esse projeto usou somente o cálculo proposicional, não foi? — perguntei.

— Esse, sim. Mas outros sistemas matemáticos também são mecanizáveis, em princípio. Você só precisa dos axiomas e das regras de dedução do sistema em questão. Talvez esse seja um ponto para você explorar. Por exemplo, é fácil eu visualizar um aposento em que haja vários matemáticos sentados, de caneta e papel na mão. Uma outra pessoa senta-se diante de um computador programado com o Algoritmo do Museu Britânico. É claro que vamos presumir que o programa seja suficientemente rápido para competir com os seres humanos. Seja como for, posso ver um ser humano após outro parando para escrever um novo teorema. E, mais ou menos com a mesma frequência, a pessoa que está operando o computador também escreverá um novo teorema.

— Bem — prosseguiu ele —, quando você examinar a lista de teoremas descobertos pelos matemáticos, sejam eles da Turquia ou do Tibete, encontrará um grande número que será idêntico ou intimamente relacionado em termos matemáticos. Além disso, todos os teoremas que os matemáticos descobrirem serão descobertos pelo computador, mais cedo ou mais tarde. Nesse meio, a descoberta independente não chega a ser um mistério e, sem me comprometer com o que parece ser a sua opinião, certamente posso dizer que é um erro encarar as descobertas independentes como mera coincidência, sejam elas mecânicas ou culturais. O que mostra o exemplo do computador é que os teoremas, seja qual for a situação deles no seu holos, certamente estão implícitos no sistema. Estão esperando para ser descobertos, assim como se espera que o número 37 seja recitado quando uma criança conta até 100.

Tínhamos gravitado para o outro lado da rua, por alguma razão, e estávamos nesse momento diante de uma igreja antiga e famosa, a de Sta. Maria Madalena. Desde que havíamos deixado

o hotel onde Brainard mencionara as máquinas de pensar, eu vinha esperando que ele abordasse o assunto diretamente. Impaciente, perguntei: — Quer dizer, então, que as máquinas de pensar são apenas computadores?

Brainard apontou para um prédio baixo de dois andares, um pouco adiante na rua. — Terei mais a dizer sobre isso quando chegarmos lá.

Entramos no Instituto de Matemática e vimo-nos num amplo saguão contíguo a um grande salão de chá, de onde vinha uma explosão de gargalhadas altas. Brainard mostrou-me alguns dos quadros na parede.

— A-ha. Este aqui é G.H. Hardy, um verdadeiro oxfordiano e um dos melhores matemáticos do início do século XX. Foi Hardy quem disse que existe uma realidade matemática fora de nós. Chegou até a ir mais longe, declarando que ela faz parte da realidade física, sem dizer em que sentido se dá essa participação.

Um grupo de pessoas tinha-se juntado atrás de nós.

— Boa-tarde, John — disse uma delas. — Você chegou bem na hora do chá. Como tem passado?

Havia professores e alunos de pós-graduação nesse grupo. Evidentemente, Brainard não ia com frequência ao Instituto, sem dúvida por causa de sua idade avançada.

— Este tal de Dewdney está testando os limites da minha paciência — respondeu ele. — Está me cumulando de perguntas de filosofia matemática, a ponto de meu cérebro estar prestes a estourar!

Ele me apresentou ao grupo e seguimos para o salão de chá. Sentamos a uma mesa comprida e, depois de muito barulho de xícaras batendo nos pires e bolos sendo servidos nos pratos, Brainard apresentou-me às outras pessoas da mesa, mencionando que eu tinha sido convertido por um grego à ideia inédita de que a matemática inteira existe num lugar chamado *holos*. Essa apresentação deixou-me meio constrangido, mas percebi por muitos sorrisos que todos presumiam que Brainard estava fazendo troça deles. Em seguida, ele simplesmente retomou nossa conversa anterior no ponto em que a havia deixado.

— Eu estava para explicar ao meu convidado umas ideias curiosas sobre a teoria da computação. É especulativo, admito, mas existem algumas quase perguntas interessantes ligadas a isso.

Um dos estudantes da pós-graduação perguntou o que seria uma quase pergunta e, em meio a uma gargalhada, Brainard declarou que era uma pergunta que tinha uma quase resposta. Ele estava no seu elemento, lecionando outra vez.

— Vamos começar uma espécie de jogo — continuou —, onde imaginaremos um computador construído por uma raça de alienígenas num outro planeta do nosso universo, ou de um outro universo, se vocês preferirem. Não faz diferença. Minha pergunta é a seguinte: que tipo de computador seria esse? Que funções poderia computar e que princípios matemáticos incorporaria? A quase resposta é que, fizesse ele o que fizesse, creio que seria incapaz, em princípio, de computar qualquer coisa que nossos computadores não computassem. Quem sabe dizer por que acredito nisso?

— Porque você é um velhote bobo e senil — comentou jovialmente um professor do outro lado da mesa. Era Weisskopf, um matemático sênior do instituto, conhecido por seu senso de humor escandaloso. Houve outra gargalhada geral, enquanto Brainard sorria.

— Acertou nas três afirmações — murmurou ele, satisfeito, e percorreu o grupo com os olhos. — Mais alguém?

— Tenho certeza de que o senhor está querendo que alguém diga “a tese de Church” — exclamou bem alto um mestrando.

— É justamente a tese de Church. Como todos aqui sabem, sem dúvida, a tese de Church diz que todos os computadores são iguais, num certo sentido preciso. É uma proposição realmente espantosa, quando se para para pensar no assunto. Todos acreditam que seja verdadeira, mas ninguém tem a menor ideia de como demonstrá-la. Talvez seja uma daquelas proposições gödelianas do tipo “você não pode chegar lá partindo daqui”.

— Aliás — continuou Brainard —, sem mudar de assunto, eu me pergunto quantos matemáticos ficam tão contentes quanto eu com a perspectiva de teoremas que nunca conseguiremos demonstrar. Talvez eles estejam todos escondidos num canto escuro do holos do Dewdney, mas eu gostaria que houvesse um aqui por perto, para que eu ficasse sabendo antes de morrer. Que briga haveria, quantas investigações, e quanta nova matemática seria gerada! Onde é que eu estava?

— Na tese de Church — disse um aluno.

— É claro. A tese de Church surgiu de uma circunstância muito peculiar, no início da história da teoria da computação. No começo dos anos trinta, neste século, tinham sido propostos nada menos de três modelos abstratos completamente diferentes do que significava computar uma função. Como eu imagino que vocês se deem conta, nessa época não havia computadores

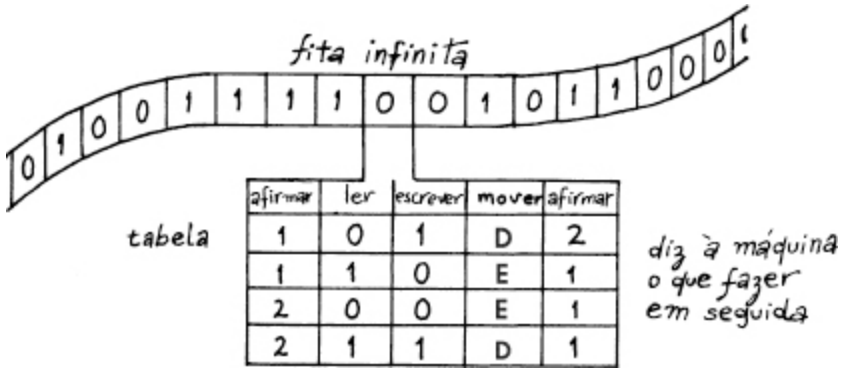
em lugar nenhum. Os computadores eram apenas um brilho no olhar de um punhado de matemáticos, inclusive Alan Turing, Alonzo Church, o lógico norte-americano, e mais alguns outros. A ideia estava no ar, por assim dizer, como uma espécie de espírito da época.

— Church — prosseguiu ele — havia formulado uma nova maneira de calcular as coisas, chamada cálculo lambda. Mas já se havia publicado uma outra maneira, aparentemente bem diferente, de definir a computação. Chamava-se teoria da recursividade geral. Comparando o cálculo lambda com a recursividade geral, Church ficou atônito ao descobrir que eles calculavam exatamente as mesmas coisas. Ora, isso talvez não fique imediatamente óbvio para alguns de vocês, mas, no sentido mais geral, quando alguém se dispõe a definir um sistema para computar funções, ele deve esperar constatar que algumas funções são computáveis por seu sistema e algumas, não. Mas Church constatou que as duas formulações, apesar de suas vastas diferenças, eram completamente equivalentes nesse sentido. Elas calculavam exatamente as mesmas funções, ainda que de maneiras diferentes. Church até tentou pensar numa maneira de computar que não fosse equivalente a essas formulações, mas não conseguiu. Isso o levou a declarar, com muita ousadia, na opinião de alguns, que qualquer esquema proposto naquele momento ou no futuro revelaria ter um poder de computação equivalente à recursividade geral do cálculo lambda. A isso chamamos tese de Church, que é um pouquinho diferente de uma conjectura, porque não foi muito bem definida. De qualquer modo, não se chama isso de teorema de Church. Ela pode não ser um teorema, é claro. Talvez haja uma ideia muito mais poderosa da calculabilidade, mas temos boas razões para duvidar de que exista.

— Pois vejam — continuou Brainard —, pouquíssimo tempo depois de Church afirmar sua tese de que todos os computadores eram iguais, num sentido preciso, apareceu um artigo de Alan Turing no qual foi descrita pela primeira vez a ideia da computação da máquina de Turing. Nesse artigo, Turing mostrou que a máquina de Turing (não era assim que ele a chamava, é claro) era equivalente ao cálculo lambda e à recursividade geral. As máquinas de Turing também computavam exatamente as mesmas funções dos outros dois esquemas. Além disso, a formulação que ele fez do que significava computar foi muito diferente da dos outros dois esquemas, mais diferente do que eles eram entre si!

— Desde então — acrescentou Brainard —, literalmente dezenas de esquemas diferentes de computação foram propostos. Desde que eles implicassem um conjunto finito de regras definidas para manipular um conjunto finito de símbolos, mostrar-se-iam equivalentes a todos os seus predecessores, ou, de vez quando, ficariam muito pouco aquém deles. Eu digo que há caça muito pesada aí, falando em termos matemáticos. Se a tese de Church for verdadeira e se um alienígena construir um computador que atenda a essas exigências mínimas, esse computador não será nem um pouquinho mais poderoso do que os nossos. Ele não seria capaz de calcular nenhuma função que nossos computadores não pudessem calcular. Talvez fosse mais rápido, é claro, ou até mais lento, mas, essencialmente, não seria diferente.

— Ora, a máquina de Turing é um tipo de máquina muito esquisito — disse ainda Brainard. — Ela é abstrata, é claro, mas vocês podem notar que é um tipo de coisa muito voltada para a ação. Ela lê símbolos numa fita e, em resposta a esses símbolos, escreve outros. É controlada por uma tabela interna que lhe diz, para cada símbolo com que ela possa deparar em sua fita, que símbolo escrever no lugar dele e como movimentar a fita para o ciclo seguinte de operação. Que tal se eu fizer um desenho? — perguntou, retirando o célebre bloco do bolso.



Uma máquina de Turing

— Bem, para os meus propósitos — prosseguiu Brainard —, não é importante apreender com precisão como funciona uma máquina de Turing. Mas é importante observar que, quando se modifica a tabela interna, modifica-se a máquina. Existe um outro tipo de máquina, chamada máquina universal de Turing, que é provida de uma tabela fixa e uma fita programada adicional, que ela pode consultar à medida que vai computando

em sua fita principal. Todas as vezes que ela depara com um símbolo novo na fita principal, sua tabela a leva a consultar a fita do programa sobre o que fazer. Essa máquina universal é apenas uma versão abstrata do moderno computador digital. Representa todos os computadores digitais da Terra, embora nenhum deles se pareça com as máquinas de Turing. Se Church tinha razão, a máquina universal representa também todos os computadores digitais possíveis em qualquer parte do cosmo, passados, presentes e futuros.

— Pois bem — disse Brainard —, se o nosso amigo alienígena, ele, ela ou isso, investigasse um pouco mais o assunto, desembocaria, penso eu, na tese de Church, chamando-a talvez de tese de Blorg, já que não teria a menor ideia de quem era Church.

A ironia descontraída de Brainard provocou outras risadas, e ele prosseguiu: — O objetivo desta observação é responder a uma pergunta feita por meu convidado. Dewdney me perguntou se eu posso fornecer alguma prova da existência independente da matemática ou explicar seu poder absurdo.

— Os computadores — acrescentou ele — estabelecem pelo menos uma coisa sobre as realidades matemáticas. Como pode alguém duvidar da existência independente dos números 0 e 1? Eles se manifestam de muitas formas diferentes num computador. Ora são o ponto luminoso na tela, ou a ausência dele, ora a carga de um transistor, ou a ausência dela, ora a presença de um pulso num cabo, ou sua ausência, ora um “1” ou um “0” impressos no papel. Eles pulam de uma forma para outra, sempre indiferentes à definição final, mas inegavelmente reais. Já não dependem da mente humana, e a evanescência de sua existência é exatamente a prova de sua realidade última.

— É exatamente esse mesmo problema — continuou Brainard — que diz respeito à realidade dos genes, esses pedacinhos minúsculos de proteína que tanto determinam quem e o que somos. Os genes são reais? Na morte, todos esses pedacinhos de proteína morrem conosco, mas continuam vivos através de nossos descendentes. A informação de um gene pode ser transmitida de uma geração para outra durante milhares ou até milhões de anos, sem alteração. O que é o gene, então? Não é apenas a proteína, mas o padrão que ela encarna, o que é um conceito completamente matemático, nem mais, nem menos. Podemos expressar esse padrão com o alfabeto de quatro letras, mas todas as expressões são arbitrárias. Num certo sentido

crucial, o padrão do gene é mais real do que as expressões particulares que ele encontra nos pedaços de proteínas, muito embora, como os números de um computador, ele dependa do substrato físico para se manter vivo, por assim dizer.

— Uma vez que vocês admitam essa realidade determinante do 0 e do 1, será que os inteiros restantes podem demorar muito a aparecer? — perguntou Brainard. — E as fórmulas e expressões de que eles participam? Serão elas menos reais?

Houve um silêncio prolongado, durante o qual Brainard engoliu várias vezes e ficou meio pálido.

— Escute, você está se sentindo bem? — perguntou Weisskopf, manifestando-se mais uma vez.

— Estou terrivelmente cansado. Será que um de vocês pode ter a bondade de levar o Dewdney até a Abadia de Whytham? É lá que o David Gridbourne tem seu computador, vocês sabem.

Brainard tinha mencionado que talvez eu gostasse de conhecer Gridbourne, que tinha a reputação de ser uma espécie de cientista louco. Segundo Brainard me informou, Gridbourne julgava ter produzido criaturas vivas em seu computador.

Antes de sair, agradeci profusamente a Brainard. Ele apertou minha mão de um modo quase convulsivo. — Pelo amor de Deus, trate esse assunto com a atenção que ele merece e, acima de tudo, cuidado com o Gridbourne. É um sujeito ótimo, mas, na verdade, é um lunático!

Um jovem matemático chamado Winslow tirou-me de Oxford por uma estrada campestre e me levou à aldeia de Whytham, com seus indefectíveis muros de pedra e telhados de colmo. Perguntei-lhe sobre Gridbourne. Winslow o conhecia vagamente e confessou-se curioso a respeito do “Prodígio Whytham”, como o matemático costumava ser chamado em Oxford. Perto do centro da aldeia, Winslow fez uma curva fechada, entrou num pátio e parou, cantando os pneus, diante de uma estrutura de pedra de idade indeterminada. Entramos por enormes portas de carvalho e nos vimos num saguão ladeado de portas que davam para vários apartamentos.

— O laboratório fica aqui, eu acho — disse Winslow, dirigindo-se a uma das portas.

A porta se abriu e revelou um homem de meia-idade, com ar atormentado, cabelos cinza-prateado, grandes lábios carnudos e voz grave.

— O Brainard achou que o senhor se disporia a receber uma visita, mesmo que seja por pouco tempo — explicou Winslow, meio nervoso, enquanto Gridbourne espiava com curiosidade para ver quem estava atrás do matemático.

— Imagino que você esteja querendo ver o maldito universo bidimensional — disse-me Gridbourne, em tom meio brusco.

Ele parecia estar de mau humor, e fiquei por ali até Winslow nos apresentar. Entramos num aposento palaciano, que dava para um pátio onde havia um roseiral. Gridbourne, que era membro do instituto, raramente visitava seu escritório, a tal ponto estava mergulhado em seu projeto de computação. Dispondo de recursos independentes, como diziam os britânicos, ele estava livre de muitas restrições, inclusive da necessidade de conseguir verbas de financiamento. Examinamos a máquina, que era um conjunto de potentes computadores Sun com enormes *drives* de disco, todos numa bancada encostada numa das paredes.

— Nunca desligo essa máquina — disse Gridbourne. — Ela tem um gerador de reserva, para a eventualidade de faltar luz. Nos últimos dois anos e meio, venho rodando um programa simulador chamado 2DWORLD, que é basicamente um autômato celular. Imagine um universo bidimensional com a forma de uma vasta esfera. Ele se divide em células quadradas minúsculas e o que acontece em cada célula é determinado por equações simples, que imitam, até certo ponto, as equações da física moderna.

Gridbourne acrescentou: — Comecei por uma situação em que era aleatoriamente atribuído um 0 ou um 1 a cada célula desse universo. Eu não estava muito satisfeito com as regras e havia pretendido corrigi-las com algumas rodadas de teste, antes de começar a investigar esses axiomas para valer. Mas o que aconteceu nas primeiras horas e, depois, nos primeiros dias e semanas, impediu-me completamente de desligar a máquina a qualquer momento, ou de deixar que ela fosse desligada.

— O que foi que você viu? — perguntei, começando a ficar intrigado.

À guisa de resposta, ele apertou uma tecla e a tela se acendeu com estranhos padrões de quadradinhos. Os padrões se expandiam e se contraíam de maneira regular, trocando pequenos pulsos de pontos brilhantes, como as lâmpadas de uma vitrine da Times Square. Gridbourne apertou outra tecla e a escala da tela alterou-se, como se uma câmera se afastasse da cena, mostrando-nos uma imagem maior.

— O que você acabou de ver — disse ele — foi a física básica desse cosmo bidimensional. Agora, está olhando para uma molécula bem grande, que tem-se tornado cada vez mais numerosa no meu pequeno cosmo desde o último Natal.

De fato, uma estrutura grande e complexa girava agora diante de nossos olhos. Gridbourne tornou a apertar a tecla para mostrar um novo nível de integração, no qual as moléculas — umas grandes, outras pequenas — circulavam dentro de uma tosca membrana circular.

— Isso é o que eu estou pensando? — perguntei.

— O que você acha que é? — retrucou ele, erguendo os olhos com ar incrédulo.

— Bem, eu digo que parece estar vivo, de algum modo.

— E está — respondeu Gridbourne, satisfeito. — Algumas regras da física parecem garantir o surgimento de níveis de organização, um após outro, aparentemente de maneira infindável. Nesse nível, o sistema chegou a estruturas que se propagam interminavelmente. E elas têm mudado, desde que surgiram pela primeira vez. Decididamente, estão ficando mais complexas, e têm uma espécie de código genético, embora ele se baseie em estruturas muito diferentes da do nosso.

— Elas estão mesmo evoluindo? — perguntei.

Gridbourne pareceu muito contente com essa pergunta. — Não sei. Acho que essa é a pergunta que me mantém em suspenso diante do programa. Como você deve saber, com certeza, um cenário evolutivo indefinido pode acabar levando a criaturas inteligentes, mesmo que sejam bidimensionais. Isso me deixaria numa situação um bocado difícil. Por um lado, seria a proeza científica do século, para não dizer do milênio. Por outro, eu me sentiria responsável por essas criaturas, mas completamente inseguro do que fazer.

Depois de alguma reflexão, fiz a pergunta que me era mais cara. — Suponho que elas poderiam desenvolver a ciência, descobrindo as leis que você instalou em seu espaço celular. Você acha que algum dia elas descobririam que só existem num computador?

— Talvez. Mas não teriam a menor ideia de em qual computador, nem onde. Os computadores têm mil residências possíveis, cada uma baseada numa tecnologia inteiramente diferente. Em princípio, você poderia construir um computador com cordas e polias, uma coisa realmente maciça

e muito lenta, cobrindo milhares de quilômetros quadrados, e poderia rodar nesse computador um equivalente do programa 2DWORLD. E as criaturas não teriam a menor ideia de que seu espaço era uma quantidade colossal de zeros e uns, armazenada num computador de cordas e polias, ou, se você preferir, de bambu e seda, ou de elétrons no silício, ou de jatos d'água em canais plásticos, ou de luz e fibras óticas, ou seja lá do que for. Essa seria uma barreira que elas jamais conseguiriam ultrapassar.

— A propósito — prosseguiu Gridbourne —, não sou realmente louco. Não acho, nem por um segundo, que estejamos na mesma situação de qualquer das criaturas emergentes em meu sistema. Mas você tocou num ponto muito problemático, que ronda os fundamentos de qualquer investigação sobre os limites necessários do nosso conhecimento. É que atrás desses limites pode haver verdades profundas demais para suportar, inclusive as razões de nossa existência.

Gridbourne era um homem mergulhado num fenômeno, e seu último comentário pareceu devolver seu pensamento ao trabalho que tinha nas mãos. Embora se houvesse tornado muito cordial, ele voltou a ficar tenso e me despachou às pressas de seu laboratório.

Quando voltei a Oxford, Brainard tinha ido para casa, para tirar um cochilo durante o resto da tarde, de modo que não tive oportunidade de ponderar com ele sobre o trabalho de Gridbourne. Meu trem saiu da estação de Oxford às 5 horas da tarde. Tendo apenas o apito prolongado e o chacoalhar das rodas para acompanhar meus pensamentos, observei rapidamente uma reprise da paisagem da véspera, enquanto minha própria máquina de pensar revolvia repetidamente as questões. Perguntei-me por que Brainard tinha-me mandado para a abadia. Teria sido para que eu assistisse ao ato máximo de uma máquina de pensar, isto é, a sua transformação na sede de um universo em miniatura? Seria essa a sua sugestão matreira de que, afinal, o holos era real e vivia em algum computador do cosmo, situado nos bastidores? Se assim fosse, minha busca estaria condenada ao fracasso, sem estar necessariamente errada. Ou será que o mundo bidimensional de Gridbourne pretendia apenas demonstrar que os computadores, que compartilham com os seres humanos uma certa facilidade para manipular símbolos, representam a expressão máxima da independência da matemática?

Minha aventura matemática estava encerrada. Restava apenas refletir sobre tudo o que eu havia aprendido em minhas viagens e tentar chegar a

alguma conclusão. Enquanto isso, ao que parecia, eu tinha revivido a prática tradicional de viajar à procura do saber. Senti-me um pouquinho como um Tales dos tempos modernos, ou como Fibonacci, trazendo tesouros intelectuais de quatro cantos diferentes do mundo.

---

a Perde-se na tradução o trocadilho que o autor faz entre *metamathematics* [metamatemática] e *met a mathematics* [encontrado uma matemática]. (N.T.)

EPÍLOGO:
COSMO E HOLOS

Eu estava a meio caminho da travessia do oceano Atlântico, desfrutando do conforto de um raro prazer (uma poltrona na primeira classe), quando, de repente, comecei a ser assaltado por dúvidas sobre o poder e a existência independente da matemática. Nesse exato momento, o avião começou a trepidar. A propulsão dos motores deixou de se igualar à pressão da resistência do ar, o fluxo de ar sobre as asas parou de obedecer às equações da dinâmica dos fluidos, e a força da estrutura deixou de ser proporcional aos cortes de suas partes. O avião desfez-se em pedaços, com seus fragmentos caindo com velocidades e acelerações arbitrárias, alguns deles indo para cima. Eu estava perdido.

Em vez de mergulhar no oceano gelado lá embaixo, entretanto, sem que ninguém jamais voltasse a ouvir falar de mim, permaneci em minha poltrona. Abri os olhos. Estava tudo normal. A aeromoça distribuía o jantar e ninguém parecia minimamente assustado. Meu pesadelo teve um efeito positivo, entretanto. Ele me fez indagar como seria o cosmo se não obedecesse a leis matemáticas. Seria isso concebível? Olhando a questão pelo ângulo inverso, também se poderia perguntar: como seria o cosmo se ele de fato obedecesse a leis matemáticas? Como saberíamos a diferença? Eu conseguia imaginar um projeto inteiro de pesquisa para abordar essa questão.

De volta a minha casa, tive tempo de reler minhas volumosas anotações e de transcrever as gravações de minhas conversas com Pygonopolis, al-Flayli, Canzoni e Brainard. Chegou o momento de resumir minhas ideias e reflexões sobre o que eu havia aprendido em minhas viagens. Embora eu tenha tentado ser objetivo, não consigo deixar de achar que existe algum tipo de holos atrás do cosmo.

Durante minhas viagens, conversei com quatro estudiosos, nem todos eminentes, é claro, mas cada qual dedicado, à sua maneira, à crença em que alguma coisa está acontecendo. Todos compartilhavam da convicção de que existe uma ligação profunda entre a matemática e o cosmo, ou, se preferirmos, entre o holos e o cosmo. Eu ouvira atentamente esses pesquisadores rigorosos, em escritórios, jardins, ruas da cidade e templos antigos, no deserto ou durante a sobremesa. Vira-os desenharem diagramas no chão, em quadros-negros, em blocos, em guardanapos e até no céu noturno. Se minhas conclusões parecem inclinar-se maciçamente para as deles, ninguém pode culpar-me por isso.

O personagem histórico central dessa minissaga matemática é Pitágoras. Deparamos reiteradamente com sua influência em toda a história da matemática e penetrando em muitas culturas. Vimos provas de que a famosa irmandade pitagórica transformou-se na Irmandade da Pureza durante o período islâmico, e depois não mais se ouviu falar nela. Os pitagóricos, entretanto, continuam a espocar aqui e ali nessa mesma história. Kepler e Balmer, podemos suspeitar, são apenas a ponta de um iceberg. Os matemáticos que se interessam pela física, e que têm a convicção de que o papel da matemática no cosmo não se deu por acaso, provavelmente se solidarizariam com o espírito pitagórico.

O teorema de Pitágoras, com o qual este livro se iniciou, também surge em mais de uma aplicação: distâncias espaciais, trigonometria, relatividade e assim por diante. Ele aparece em literalmente milhares de aplicações, provavelmente mais do que qualquer outro teorema da matemática. E não o faz por ser antigo, uma vez que temos centenas de teoremas vindos da Antiguidade, todos tão válidos hoje quanto eram então, mas nem todos tão úteis quanto o teorema de Pitágoras.

Permitam-me começar dando uma nova formulação às convicções de Pitágoras sobre a estrutura última do cosmo, atenuando-as e tornando-as mais exatas:

A HIPÓTESE PITAGÓRICA

O cosmo e tudo o que há nele são regidos por leis matemáticas

Essa hipótese não diz nada sobre como o cosmo veio a existir ou porque tem essa propriedade extraordinária, mas afirma apenas que, tal como o encontramos hoje (e como Pitágoras o viu no passado), não existe nada no

cosmo — nenhum canto, nenhuma parte minúscula, nenhum acidente, nenhuma substância — que não siga este ou aquele tipo de regra matemática.

No início de minha viagem, eu estava decidido a fazer duas perguntas a meus quatro consultores, e me mantive fiel a esse projeto, às vezes recebendo respostas surpreendentes. As perguntas eram:

1. Por que a matemática é tão incrivelmente útil nas ciências naturais?

2. A matemática é descoberta ou é criada?

Se é correta a hipótese pitagórica, temos imediatamente uma resposta à primeira pergunta: suponhamos por um momento que o cosmo, incluindo a Terra e tudo o que há nela, seja determinado por leis matemáticas num sentido exato. Nesse caso, a matemática é incrivelmente útil nas ciências naturais porque a tarefa dessas ciências é desvendar a estrutura, e acontece que essa estrutura é matemática. Por conseguinte, as leis da física, da astronomia e da química *têm* que assumir uma forma matemática.

Ora, uma coisa é desvendar a estrutura do cosmo, encontrando a matemática por toda parte, mas outra, inteiramente diferente, é deparar com a matemática sem sequer considerar como pode ser a estrutura do cosmo. Pois foi assim que a maior parte da matemática foi realmente *desenvolvida* (palavra que não nos compromete com a descoberta nem com a criação). Entretanto, se o cosmo tem uma estrutura matemática (lembrem-se de que estamos presumindo a hipótese pitagórica), é de se presumir que tenha tido essa estrutura desde o começo. Ao que parece, o cosmo existia desde muito antes dos seres humanos, e existia também, portanto, a sua estrutura matemática. Exclusivamente por esse ângulo, e a despeito de algumas lacunas em minha argumentação (que poderão ser preenchidas ou não mais tarde), a hipótese pitagórica implica a preexistência da matemática, pelo menos nesse sentido. Podemos, assim, responder à segunda pergunta: “Ela é descoberta, provavelmente”.

Também podemos examinar a forma completa da hipótese pitagórica, na qual o cosmo vem equipado de um holos, um lugar em que se pode dizer que a matemática tem existência independente, embora esse lugar não fique necessariamente no cosmo. Dada a existência de um holos, a segunda pergunta torna-se tautológica: “Descoberta, é claro!” Afinal, afirmar a existência de um holos é praticamente o mesmo que dizer que a matemática é preexistente. Para minha mente fertilíssima, a preexistência implica alguma coisa que está à espera de ser descoberta.

No extremo oposto, deparamos com um cosmo perenemente incognoscível, um cosmo que foi introduzido qual uma cunha em formas culturalmente determinadas, mas arbitrárias, por uma ciência que se ilude a respeito da natureza absoluta da realidade. A foice niveladora do construtivismo social impõe uma democracia rigorosa ao próprio pensamento. Não se pode preferir arbitrariamente uma descrição do cosmo a qualquer outra. Em contraste, devemos formular uma hipótese alternativa, apesar de o construtivismo social não reconhecer que as hipóteses ou suas verificações são um caminho mais válido para o conhecimento do que as cartas do tarô.

A HIPÓTESE PÓS-MODERNA

O cosmo, seja ele o que for, não tem nenhuma descrição preferencial.

Essa postura é assustadoramente fácil de defender, quer se conheça muito da ciência ou apenas um pouquinho. Nenhuma demonstração, nenhum tipo de prova pode ter a esperança de elevar a descrição matemática do cosmo a uma posição absoluta ou especial, intrinsecamente preferida. Por definição, todas as descrições são igualmente privilegiadas. Como sabe qualquer matemático, não se pode discutir com uma definição.

Essa visão, que parece exigir uma disciplina especial para ser mantida, tem sua origem nas teorias do filósofo Thomas Kuhn, que afirmou que as revoluções científicas são movidas pela cultura ou por mudanças na cultura. Kuhn descreveu as “mudanças de paradigma”, tais como a revolução copernicana, como eventos culturais primários, sinais de mudança na maneira como as pessoas compreendem o mundo a seu redor. Essa ideia é bem defendida, só que num nível inteiramente cultural, e sem dar à concepção científica da verdade nenhum papel especial a desempenhar.

Lido com atenção, na verdade, Kuhn afirma apenas que, na mudança do paradigma copernicano, a direção das investigações astronômicas modificou-se, depois que a Terra foi destronada de sua posição central no cosmo. Isso é perfeitamente válido. Ironicamente,

o paradigma copernicano substituiu um paradigma anterior que, ao que parece, era independente da cultura! Como al-Flayli empenhou-se muito em assinalar, naquela noite memorável no deserto, todos os astrônomos do Egito, Babilônia, Índia, Grécia e Arábia antigos viam o céu da mesma

maneira, como um hemisfério. Agora, seus descendentes astronômicos “veem” o céu noturno de maneira bem diferente.

Minhas aventuras em Mileto, Ácaba, Veneza e Oxford (para não mencionar algumas leituras e consultas posteriores) convenceram-me de que, embora a forma e até a direção das investigações matemáticas tenham sido norteadas pela cultura (pelo menos em alguns casos), tal não se deu com os resultados dessas investigações. De que outra maneira podemos explicar que o teorema de Pitágoras tenha saltado de uma cultura para outra, e por que todos os outros teoremas, independentemente de quando tenham sido descobertos, fizeram o mesmo? Além disso, quando um teorema deixa de se arrojar na história, de qualquer maneira ele é redescoberto! Existem muitos exemplos desse fenômeno, inclusive o teorema de ibn Qurra, redescoberto por Pierre de Fermat. Sinto-me inclinado a tomar de empréstimo a frase daquele incansável criador de expressões, Pygonopolis: A matemática, como a roda, é transcultural.

Por exemplo, Pitágoras investigou o problema da comensurabilidade, usando diagramas visuais para objetos geométricos e numéricos e aplicando a eles argumentos lógicos. Os matemáticos modernos provam a incomensurabilidade entre o lado do quadrado e sua diagonal através de uma álgebra simbólica, aliás muito pouco sofisticada. O teorema permanece inalterado: não há medida de comparação entre o lado de um quadrado e sua diagonal. Do mesmo modo, os matemáticos árabes de mil anos atrás discutiam sua álgebra com palavras, dando-lhe uma aparência completamente diferente da álgebra moderna, mas o conteúdo é o mesmo. Até no plano dos conceitos individuais, essa regra parece aplicar-se. O número em si é transcultural, como assinalou al-Flayli: o pastor árabe vendia 42 ovelhas ao mercador bizantino, que ficava perfeitamente satisfeito com XLII delas.

Em suma, não encontrei nenhuma corroboração da hipótese pós-moderna, a não ser na forma imensamente abreviada em que Kuhn a propôs inicialmente, forma esta que nenhum cientista sério há de contestar. Naturalmente, a hipótese ousada que se formula aqui é irrefutável por definição, e, portanto, ultrapassa o alcance da argumentação ponderada.

A encantadora versão que Maria Canzoni deu à fábula dos cegos e do elefante oferece uma visão alternativa das mudanças de paradigma. Consideremos o sábio que examina primeiro a pata do elefante. Palpando as grandes unhas, ele declara: “Todos os corpos atraem uns aos outros numa

razão inversa ao quadrado da distância que os separa.” Essa é a lei da gravitação universal de Newton. Mais tarde, outro sábio apalpa a extensão da perna acima da pata. Declara ele: “A presença da matéria distorce o espaço-tempo de um modo que cria uma atração entre duas dessas distorções.” A física newtoniana, como Canzoni se empenhou em assinalar, é a pata que se encontra na ponta da perna, um caso especial da teoria mais geral de Einstein.

Na medida em que essa analogia seja válida, a expressão *mudança de paradigma* traz pouca ou nenhuma contribuição para a compreensão do elefante. Na verdade, ela tende a retardar o entendimento. No que concerne à matemática, a hipótese de que ela seja pouco mais do que um conjunto de meandros culturais só pode ser defendida se ignorarmos as provas. Como diria Sir John Brainard, “há uma caça muito grande por aqui”. Deve ser o elefante invisível de Canzoni.

Pensando bem, um fenômeno central ressurgiu ao longo de todas as minhas aventuras pelos quatro cantos do mundo, um fenômeno que eu não previra no início da viagem, mas que agora fica patentemente claro. Ele é apreendido pela expressão “conteúdo essencial”. Toda ideia matemática, desde o conceito de número até os teoremas mais sofisticados, tem um conteúdo essencial, que desafia qualquer tentativa de descrevê-lo de um modo que não equivalha a mais uma expressão desse conteúdo, fenômeno este que ecoa perturbadoramente a visão de mundo adotada pelo construtivismo social. Nenhuma expressão é preferida.

Qual é o conteúdo essencial do número 42? Não é “42” ou “XLII”, nem tampouco “1 0 1 0 1 0”. Não é “**********”, nem tampouco 6 vezes 7. No entanto, o conteúdo essencial é expresso por cada um desses meios, se corretamente entendidos. O conteúdo essencial escapole diante de qualquer tentativa de defini-lo, como o *koan* Zen: nem isto nem aquilo. Qual é o conteúdo essencial de um círculo? Não é nenhum dentre a infinidade de círculos que podemos desenhar, nem as fórmulas algébricas que possamos redigir para os círculos. Qual é o conteúdo essencial do teorema de Pitágoras? Podemos enunciar esse teorema em inglês ou em grego antigo. Podemos representá-lo por um diagrama ou por uma equação algébrica, mas ele não é nenhuma dessas coisas.

No entanto, o conteúdo essencial é uma coisa perfeitamente real, como assinalou Brainard com seu exemplo dos computadores. Os conceitos de 0 e

1, à parte os símbolos numéricos que acabo de escrever, aparecem num computador como padrões de voltagem em registros eletrônicos, como pontos de luz ou escuridão na tela de um monitor, como pulsos de alta ou baixa voltagem nos circuitos, e assim por diante. Os dígitos binários 0 e 1 não são nenhuma dessas coisas, em essência. No entanto, quando se manifestam, os dígitos binários têm efeitos reais. Os programas são executados não apenas para calcular resultados, mas também para controlar usinas de aço e aeronaves. Os zeros e uns fazem as coisas acontecer no mundo real.

Se esse exemplo parece artificial aos olhos de algumas pessoas, há também os genes mencionados por Brainard. O genoma humano pode ser escrito como uma longa "palavra" baseada num alfabeto de quatro letras — a, c, g, t. Também pode ser escrito como um número enorme, expresso numa notação de quatro dígitos: 0, 1, 2, 3. Ele ocorre naturalmente como uma sequência de pares de bases de aminoácidos na molécula de DNA. Essa molécula se rompe ao morrermos e a expressão se desintegra. No entanto, o número reaparece em nossos descendentes, expresso num novo DNA. Qual é o genoma essencial?

O conteúdo essencial é efêmero, aparecendo primeiro numa manifestação e depois noutra. Embora seja um tanto irreal nesse sentido, ele é mais do que real em outro, como se houvesse trocado sua realidade cósmica por um modo de existência novo e mais permanente. Qualquer que seja sua manifestação ou expressão, o que se manifesta ou se expressa é sempre a mesma coisa. Como assinalou Pygonopolis naquele encantador restaurante de frutos do mar em Izmir, o conteúdo essencial também se expressa através de objetos reais e tem efeitos muito reais no chamado mundo real. Se ele resolver comer todos os camarões que há em seu prato, não comerá nem mais nem menos do que três. Daí decorrerão muitas outras consequências, inclusive o momento em que ele se levantará da mesa, o peso exato de seu corpo e mais uma multiplicidade de efeitos mais sutis.

Creio ser lícito dizer que aquilo a que Pygonopolis se referiu, ao usar o termo holos, foi apenas o mundo do conteúdo essencial, que independe do mundo real, inclusive do mundo de expressões matemáticas particulares. Naturalmente, não pode haver uma maneira preferencial de compreender o holos em si. O mundo do conteúdo essencial expressa-se igualmente bem através de termos como "holos", "mundo superior" ou "mundo do conteúdo essencial". É o elefante invisível.

Talvez a abordagem mais intrigante do elefante invisível tenha sido a descrita por Canzoni. Quando o cosmo é examinado de perto, a matéria revela-se energia, e a energia se conduz de acordo com ditames matemáticos. Se até a energia é irreal, restam apenas as informações estruturais — as equações e fórmulas que descrevem tudo. O cosmo desaparece, de certa maneira. Será que Pitágoras tinha razão? O cosmo é feito de números? É muito difícil contemplar uma proposição tão insólita.

Mais do que qualquer outro nome, pareceu-me que *holos* é o que melhor descreve minhas ideias sobre o elefante invisível. Em contraste com o cosmo, onde as coisas têm manifestações físicas, o holos é onde existe a matemática. Mas, que tipo de lugar é o holos?

Primeiro, o holos não está necessariamente no cosmo. (Digo "necessariamente" apenas por não poder excluir a possibilidade de que Pitágoras estivesse certo e de que vivamos realmente no holos.) Mesmo que o holos não seja um lugar que possamos identificar fisicamente, entretanto, ele tem propriedades que o habilitam a uma certa espécie de existência. Seus marcos do conteúdo essencial, desde os números até os teoremas, persistem como acidentes geográficos. Na verdade, têm uma existência permanente.

Por conseguinte, como assinalou Pygonopolis, o holos pode ser explorado, sendo os quebra-cabeças o veículo eletivo para aqueles que têm pouco ou nenhum conhecimento de matemática. Os matemáticos que passaram os últimos 3.000 anos ou mais explorando o holos demonstraram amplamente sua existência independente, considerando-se a descoberta independente, no tempo e no espaço, de inúmeros teoremas. Falar do ressurgimento do teorema de ibn Qurra sobre os números amigos, ou da descoberta independente do cálculo infinitesimal por Newton e por Leibniz, mal chega a roçar a superfície desse fenômeno. O conteúdo essencial da matemática não é criado; é descoberto.

Foi-nos ensinado que, para explicar um fenômeno, podemos propor qualquer teoria que nos aprouver, mas que as teorias mais simples são preferíveis às teorias complexas. Esse é o princípio da navalha de Occam. Não há dúvida de que a ideia de um holos com influência direta sobre o cosmo é uma explicação complexa, mas, dada a realidade da matemática no cosmo, quem pode pensar numa explicação mais simples?

O holos é a casa do conteúdo essencial de todos os números, todos os conjuntos, todas as cadeias de símbolos, todos os exemplos de toda sorte de

objetos matemáticos conhecidos, não descobertos ou impossíveis de descobrir. O holos abriga o conteúdo essencial de todos os teoremas, todos os contraexemplos e todas as afirmações matemáticas, verdadeiras ou falsas. Como quer que seja concebido, é um lugar imenso. O volume total de informações que contém é incomparavelmente maior do que as informações que pareceriam necessárias para especificar o cosmo, mesmo que o cosmo fosse infinito.

No entanto, o holos perpassa sutilmente o cosmo. O que faz uma forma algébrica espreitando nos comprimentos de onda do átomo de hidrogênio? O que deu a Adams e Leverrier o direito de esperar que suas previsões da posição de um novo planeta no sistema solar estivessem certas? Quem pode duvidar de que, se um sistema cósmico, seja ele planetário ou atômico, obedecer a certos axiomas, ele obedecerá a todos os teoremas decorrentes desses axiomas?

Mas, por que, por que o cosmo se estrutura dessa maneira? Talvez não haja outra maneira de um cosmo (enquanto cosmo) se estruturar. Talvez Pitágoras tivesse razão, afinal.

Posso ser chamado de tolo, mas nunca de covarde. Depois de ter-me aventurado por distâncias tão imensas de meu cômodo mundo das ideias aceitas e dos tabus tácitos, por que não deveria eu ir até o fim e arriscar uma explicação para tudo? As pistas virão de uma mistura improvável de Canzoni e Brainard.

Brainard, como o leitor estará lembrado, acreditava que a matemática tinha existência independente, mas apenas na mente ou, para dizê-lo com mais exatidão, nas mentes — e não necessariamente nas mentes humanas, aliás. A matemática podia não apenas ser expressa por computadores adequadamente programados (sendo cada programa uma espécie de objeto matemático), mas também ser descoberta pelos computadores, pelo menos em princípio. Considerada nesse sentido geral, podemos dizer que a matemática existe independentemente na Mente com “m” maiúsculo, ainda que não se trate, necessariamente, de uma mente consciente.

É tentador imaginar que o cosmo seja como o programa 2DWORLD de David Gridbourne. Em algum lugar (não aqui), existe um enorme computador, que roda o programa 3DWORLD (ou será 4DWORLD?), e nós somos seus habitantes, presos em algum tipo de máquina, uma máquina cuja natureza somos incapazes de conhecer — em princípio! Essa explicação, entretanto, sabe àquela tendência preguiçosa, que todos temos,

de explicar as coisas adiando-as. Por exemplo, algumas pessoas preferem explicar a origem da vida neste planeta presumindo que ela se deslocou de outro lugar para cá sob a forma de uma “pan-espermia”. Tal explicação meramente adia a questão, forçando uma resposta vinda de outro lugar. No presente caso, teríamos de invocar algo muito mais extraordinário do que o holos — a saber, um computador cósmico, o que não posso fazer. Já arrisquei demais o meu pescoço.

Canzoni achava que faltava alguma coisa na física, alguma coisa sugerida pela mecânica quântica. Tinha a ver com a consciência. Ela considera que as especulações de cientistas como Roger Penrose e Graham Cairns-Smith são enlouquecedoramente vagas, mas muito promissoras para o futuro. E se a consciência residir num efeito físico, como afirma Cairns-Smith? Segundo essa visão, o cosmo é literalmente permeado pela consciência, embora ela só se possa manifestar de uma forma concentrada ali onde existe um cérebro ou coisa equivalente (não necessariamente um computador). A questão é que, presumivelmente, essa consciência que tudo permeia dependeria da matéria ou da energia para se manifestar. Mas a energia, de acordo com Canzoni, é, na verdade, a informação, e portanto, é algo de que a consciência pode ter conhecimento. Essa exploração está começando a me fazer lembrar o antigo símbolo veda da cobra que engole sua própria cauda.

O cosmo existe porque existe uma mente capaz de pensá-lo. Será que essa mente também depende do cosmo? Só o elefante invisível é quem sabe.

PÓS-ESCRITO

Durante a revisão deste livro, recebi a triste notícia de que Sir John Brainard havia falecido tranquilamente, certa noite, em seu *pub* favorito, sentado junto à lareira, pitando seu cachimbo e, segundo espero, ponderando sobre a ligação entre a matemática e a mente. Desejo que descanse em paz. Talvez ele finalmente obtenha algumas respostas.

Também recebi notícias de al-Flayli, o astrônomo egípcio. Ele escreveu para dizer que, em sua opinião, o holos de Pygonopolis e o Mundo Superior da Irmandade da Pureza são, provavelmente, a mesma coisa. Seu filho Ahmed acabou de conseguir uma excelente bolsa de estudos para a Sorbonne. Certamente ouviremos falar dele um dia.

Durante a revisão das provas, foi preciso acrescentar uma nota recente. Maria Canzoni entrou em contato com Pygonopolis e ele foi a Veneza encontrá-la. Escreveu ela: “Finalmente tenho uma alma gêmea, alguém com quem posso compartilhar minhas teorias. Ele está inflamado com essas ideias, por assim dizer, e planejamos diversas publicações conjuntas. Mil vezes obrigada por nos haver reunido!”

Pode ser que ainda saia alguma coisa do holos.

ÍNDICE REMISSIVO

Adams, John Couch, 1-2, 3, 4
adição, 1, 2, 3
Airy, George, 1, 2
aleatório, comportamento, 1, 2
algarismos arábicos, 1-2, 3-4
algarismos romanos, 1, 2, 3, 4
álgebra, 1-2, 3-4, 5-6, 7, 8; origem árabe, 9, 10; expressão diagramática grega, 11-12; teoria dos grupos, 13; utilizações práticas, 14; grupos de isometria, 15-16; *ver também* equações
algoritmo, 1-2
al-Hallaj, 1
al-Hasib, Habash, 1-2
alidade, 1, 2, 3
al-Khwarizmi, Mohammad ibn Musa, 1, 2, 3, 4, 5, 6
al-Kindi, 1
al-Ma'mum, califa, 1,-2, 3, 4, 5
almanaque, 1-2, 3
al-Mawsili, 1
al-Nairizi, 1
alogos, 1
al-Tusi, 1
Ångström, Anders, 1-2, 3, 4, 5
ângulos, 1, 2-3, 4; *ver também* triângulo retângulo
Apolônio, 1, 2
árabes *ver* era islâmica

aritmética, 1, 2, 3, 4-5, 6
Arquimedes, 1, 2
Aryabhata, 1
astrolábio, 1, 2, 3-4, 5
astronomia: árabe, 1, 2, 3, 4, 5, 6-7, 8-9; descoberta simultânea, 10-11
atomógonos, 1-2, 3
átomos, 1, 2, 3-4, 5, 6-7
atomos, 1, 2
axiomas, 1, 2, 3, 4-5, 6, 7; enunciados como fórmulas, 8; da igualdade, 9-10, 11-12; con-junto finito dos, 13; regras fundamentais dos, 14-15, 16; dos grupos, 17-18, 19-20; e o raciocínio matemático, 21-22; cálculo proposicional, 23, 24

Bacon, Francis, 1
Balmer, Johan, 1, 2-3, 4, 5
Banu Musa, 1
Bohr, Niels, 1, 2, 3
Brackett, série de, 1
Brahmagupta, 1

Cairns-Smith, Graham, 1
cálculo diferencial, 1, 2-3
cálculo infinitesimal, 1-2, 3, 4
cálculo lambda, 1, 2
cálculo proposicional, 1-2, 3
cálculos comerciais, 1, 2, 3-4
Cantor, Georg, 1
Carroll, Lewis, 1
Casa da Sabedorial 1, 2-3, 4-5, 6, 7-8
Cauchy, Augustin, 1
Church, tese de, 1-2
círculo, 1-2, 3, 4; ideal, 5-6, 7-8
comensurabilidade, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7
comprimentos, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7; *ver também* magnitudes comensuráveis
comprimentos de onda, 1-2, 3, 4, 5

computação analógica, 1-2
computadores, 1, 2, 3, 4, 5-6, 7, 8
conjectura das quatro cores, 1
conjuntos, teoria dos, 1
consciência, 1, 2, 3, 4
conteúdo essencial, 1-2
conteúdo transcultural, 1-2, 3, 4, 5
coordenada equatorial, 1-2
cosseno, 1, 2, 3-4
cosmo, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13-14; tese de Canzoni, 15-16; comensurabilidade, 17-18; estrutura matemática, 19-20; hipótese pós-moderna, 21-22
criação versus descoberta, 1, 2
curva, 1-2, 3

Dalton, John, 1, 2, 3
declinação, 1, 2, 3
dedução, 1, 2
definições, 1, 2, 3, 4
Demócrito, 1
demonstrações, 1, 2-3, 4-5, 6-7, 8-9
Descartes, René, 1, 2-3
descoberta independente, 1, 2, 3-4, 5-6, 7, 8
desenhos geométricos, 1-2
desvinculação, regra da, 1
diagrama em pontos, 1, 2-3, 4-5
dígitos, 1, 2-3
dinheiro, 1
Dirac, Jacques, 1
dois: personalidade do, 1-2; raiz quadrada de, 3-4, 5, 6

Eccles, Sir John, 1-2
Einstein, Albert, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
elevação ao quadrado, 1-2
energia, 1, 2-3, 4, 5

enigma de Königsberg, 1-2
epiciclo, 1
equações, 1-2; de Balmer, 3-4; diferenciais, 5; de posição, 6-7, 8; teorema de Pitágoras, 9; de Schrödinger, 10-11
era islâmica, 1, 2, 3-4, 5-6, 7
erro, 1-2, 3
Escola de Copenhague, 1, 2, 3
esfera armilar, 1-2
esfera celeste, 1, 2-3, 4-5, 6, 7-8; mapeamento da, 9-10, 11-12
esferas, 1-2, 3-4, 5; *ver também* esfera celeste
espectrógrafo, 1-2, 3-4, 5
espectros de absorção, 1
espectros de emissão, 1
estrela polar (Polaris), 1, 2, 3, 4
estrelas: nomes árabes das, 1; mapeamento da posição das, 2-3, 4-5, 6; espectros, 7-8; ilusão visual, 9-10
Euclides, 1, 2, 3, 4
Euler, Leonhard, 1, 2-3, 4

Fermat, Pierre de, 1, 2, 3
Fibonacci, 1, 2
fio de prumo, 1, 2
fórmulas, 1, 2-3, 4, 5
funções fuchsianas, 1-2

genes, 1, 2
geometria, 1, 2, 3, 4-5; simbólica, 6-7, 8-9
gnômon, 1-2
Gödel, Kurt, 1-2, 3, 4
Goldbach, conjectura de, 1
gravidade, 1-2, 3, 4-5, 6
grupos, 1-2, 3-4

Hardy, G.H., 1, 2, 3
Herschel, William, 1, 2-3

Hilbert, David, 1, 2-3, 4
hipótese, 1
hipótese pitagórica, 1-2
hipótese pós-moderna, 1-2
holos, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10-11, 12, 13; axiomas e, 14, 15-16; definição do, 17-18, 19-20; e o conteúdo essencial, 21-22; componentes fundamentais do, 23; existência real do, 24, 25, 26, 27

igualdade, axioma da, 1-2, 3
imagem especular, 1
indeterminação, 1-2
Índia, 1, 2, 3, 4
infinitude/infinito, 1, 2, 3, 4-5
influências culturais, 1, 2-3, 4-5, 6, 7-8, 9, 10-11
inteiros, 1-2, 3-4, 5-6, 7, 8; comensurabilidade dos, 9; comprimentos de onda do hidrogênio, 10-11, 12-13; comprimentos, 14-15; números quânticos, 16; razões entre os, 17, 18-19, 20-21, 22, 23
inteiros, universo dos, 1, 2-3, 4, 5, 6, 7, 8
Irmandade da Pureza, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7
Irmandade Pitagórica, 1, 2-3, 4-5, 6, 7-8, 9
irracionais, 1, 2, 3, 4; o número pi como, 5, 6
Ishaq, Hunain, ibn, 1
isometria quíntupla (falsa), 1

jogo das réguas, 1-2

Kepler, Johannes, 1-2, 3, 4, 5, 6
Khayyam, Omar, 1
Kuhn, Thomas, 1-2

Laboratório CERN (Genebra), 1, 2
Lagrange, teorema de, 1, 2
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1-2, 3, 4
Leonardo di Pisa *ver* Fibonacci
Leverrier, Urban Jean, 1, 2, 3
Lidell, decano, 1

linha reta, 1, 2
linhas, 1, 2; do astrolábio, 3, 4; do hidrogênio, 5-6, 7-8, 9; definidas por pontos, 10, 11, 12; espectrais, 13; de isometria, 14-15; tangentes, 16-17
linhas do hidrogênio, 1-2, 3-4, 5
Lua, 1-2
Lucrécio, 1
luz, 1, 2, 3
Lyman, série, 1

magnitudes incomensuráveis, 1, 2, 3, 4, 5, 6-7, 8-9, 10-11, 12
Maomé, 1
máquinas de pensar, 1, 2-3, 4
matemática grega antiga, 1, 2-3; *ver também* Pitágoras
matéria, 1-2, 3
mensuração: exatidão da, 1-2; unidades gregas antigas de, 3-4, 5-6, 7-8; unidades ångstrom, 9- 10, 11-12; linha basal astronômica, 13; experimentos de Pitágoras, 14-15; *ver também* magnitudes incomensuráveis
mente (*menos*), 1, 2, 3, 4, 5, 6-7
metamatemática, 1-2
misticismo, 1, 2-3, 4, 5-6, 7
movimento planetário, 1-2, 3-4, 5, 6-7
movimento, 1-2, 3
multiplicação, 1-2, 3, 4, 5, 6
Mundo Superior, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7
Mundo Três, 1-2
mysterium cosmographicum, 1, 2

Netuno (planeta), 1
Newton, Isaac, 1-2, 3, 4, 5, 6
notação posicional, 1
notação, 1, 2, 3-4
número fundamental, 1, 2-3
número puro, 1

números: amigos, 1-2, algarismos arábicos, 3-4, 5-6; como base da aritmética, 7; pares, 8; fundamentais, 9, 10-11; diagramas gregos de pontos, 12, 13-14, 15-16; generalizados pelos grupos, 17, 18; notações, 19; personalidade dos, 20; como quantidade, 21; quânticos, 22-23; racionais, 24, 25, 26, 27, 28; realidade e, 29-30, 31, 32, 33-34, 35-36; romanos, 37, 38, 39; como transculturais, 40; *ver também* inteiros; irracionais
números amigos, 1-2, 3
números ilógicos *ver* irracionais
números inteiros *ver* inteiros
números racionais, 1, 2, 3, 4, 5

Occam, navalha de, 1
operações de isometria, 1-2
operações inversas, 1

padrões, 1, 2-3, 4; repetições de, 5-6
palavras: para problemas algébricos, 1-2, 3-4; árabes usadas em inglês, 5-6; matemáticas, 7-8
palavras árabes, 1-2
Paschen, série de, 1
Penrose, Roger, 1
Pfund, série de, 1
pi, 1, 2
Pitágoras, 1-2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-9, 10, 11, 12, 13, 14; misticismo de, 15, 16, 17-18, 19-20; influência permanente de, 21-22, 23, 24, 25-26, 27, 28-29; *ver também* magnitudes incomensuráveis
Pitágoras, teorema de, 1-2, 3, 4-5, 6, 7-8; descoberta versus criação do, 9; conteúdo essencial, 10; percepções que levaram ao, 11-12; enunciação do, 13, 14-15, 16; demonstração pelo quadrado inclinado, 17-18; aplicações intemporais do, 19-20, 21, 22, 23-24, 25; como transcultural, 26
plano, 1-2
platonismo, 1-2, 3, 4, 5, 6
Poincaré, Henri, 1, 2
Polícrates, 1

pontos, 1, 2, 3-4
pontos do enigma de Königsberg, 1-2
Popper, Sir Karl, 1-2
postulados *ver* axiomas
Ptolomeu, 1, 2, 3, 4, 5-6, 7
pygon, 1

quadrado, 1-2; incomensurabilidade do, 3-4, 5, 6, 7-8
quadrado egípcio, 1-2, 3, 4, 5-6, 7, 8
quebra-cabeças, 1, 2, 3, 4
Qurra, Thabit ibn, 1, 2-3, 4, 5-6

raízes quadradas, 1-2, 3, 4, 5
razões: entre inteiros, 1, 2-3, 4-5, 6, 7; pi e, 8; razões entre, 9, 10; trigonométricas, 11; de números de comprimento de onda, 12, 13
realidade, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7-8, 9, 10, 11-12
rede, 1-2
reflexão, 1
régua *pechya*, 1-2, 3
Renascimento, 1-2
revolução copernicana, 1, 2-3, 4, 5, 6
revoluções científicas, 1
rotações, 1-2, 3, 4-5
Russell, Bertrand, 1, 2
Rutherford, Ernest, 1, 2

Samos, 1, 2
Schrödinger, Erwin, 1, 2
secções cônicas, 1
senos, 1, 2, 3-4
Siddhanta, 1
símbolos, 1-2, 3-4, 5, 6
símbolos de perfeição, 1
sistema sexagesimal das horas 1
sistemas de coordenadas, 1, 2

Sol, 1, 2, 3, 4, 5-6
sólidos platônicos, 1, 2

Tales, 1, 2-3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tangente, 10, 11-12, 13
teorema da incompletude, 1-2, 3-4
teoremas, 1, 2, 3, 4-5; baseados em axiomas, 6; nascimento dos, 7-8; gerados por computadores, 9-10; contraexemplo, 11; como fórmulas, 12; teoria dos grupos, 13; incompletude, 14-15, 16; descobertas independentes, 17; aparições contínuas, 18; demonstrações, 19-20, 21-22; cálculo proposicional, 23-24; suspeitos, 25
teoria quântica, 1, 2-3, 4, 5-6, 7
tetraedro, 1
topologia, 1
transmigração das almas, 1
triângulo, 1-2-3, 4, 5-6
triângulo de Pitágoras, 1-2
triângulo retângulo: figura egípcia, 1-2; teorema de Pitágoras, 3-4; tradução trigonométrica, 5-6; velocidade e, 7-8
trigonometria, 1, 2, 3, 4-5
truque egípcio da corda, 1
Turing, máquina de, 1-2

um (número), 1, 2-3, 4, 5-6
unidade fundamental, 1
universo bidimensional, 1-2, 3-4
Urano (planeta), 1-2

velocidade, 1-2
velocidades, 1-2, 3
Verdade de Deus (Al Haq), 1
verdades, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Weinberg, Steven, 1, 2
Whitehead, Alfred North, 1, 2
Wigner, Eugene, 1, 2

X (como incógnita), 1, 2, 3

Zenão, paradoxo de, 1-2
zero, 1, 2, 3-4, 5-6

Título original:
A Mathematical Mystery Tour:
Discovering the truth and beauty of the Cosmos

Tradução autorizada da primeira edição norte-americana
publicada em 1999 por John Wiley & Sons,
de Nova York, Estados Unidos

Copyright © 1999, A.K. Dewdney

Copyright da edição em língua portuguesa © 2000:
Jorge Zahar Editor Ltda.
rua Marquês de São Vicente 99, 1º andar
22451-041 Rio de Janeiro, RJ
tel.: (21) 2529-4750 / fax: (21) 2529-4787
editora@zahar.com.br
www.zahar.com.br

Todos os direitos reservados.
A reprodução não autorizada desta publicação, no todo
ou em parte, constitui violação de direitos autorais. (Lei 9.610/98)

Grafia atualizada respeitando o novo
Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Capa: Carol Sá e Sérgio Campante

ISBN: 978-85-378-0472-8

Edição digital: junho 2011

Arquivo ePub produzido pela **Simplíssimo Livros**